La continuité

1. **La continuité**
2. **La continuité en un point :**

***Activité :***

On considère deux fonctions définies par :

1. Calculer puis comparer le résultat avec .
2. Calculer puis comparer le résultat avec .
3. Que déduisez-vous ?

***Définition :***

|  |
| --- |
| Soit une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert et soit un élément de . est **continue en**  si et seulement si **.** |

***Exemple :***

Soif la fonction numérique définie par :

Etudier la continuité de au point d’abscisse.

***Exercice d’application :***

Soit la fonction numérique définie par :

Etudier la continuité de au point d’abscisse.

1. **La continuité à droite - la continuité à gauche en un point :**

***Définition :***

|  |
| --- |
| Soit une fonction numérique à variable réelle définie sur un intervalle du type , avec .* On dit que est **continue à droite en**  si .

Soit une fonction numérique à variable réelle définie sur un intervalle du type , avec .* On dit que est **continue à gauche en**  si .
 |

***Exemple :***

Soit la fonction numérique définie sur par :

Etudier la continuité de la fonction à droite en 1 et à gauche en 0.

**L’interprétation géométrique :**





***Propriété :***

|  |
| --- |
| Soit une fonction numérique à variable réelle définie sur un intervalle ouvert et .La fonction est **continue en**  si et seulement si est **continue à droite et à gauche** en .c-à-d**: et .** |

***Exercice d’application 01 :***

Soit la fonction numérique définie par :

1. Etudier la continuité de en 0.
2. Tracer la courbe de la fonction dans un repère orthonormé.

***Exercice d’application 02:***

Soit la fonction numérique définie par :

Etudier la continuité de la fonction en 0.

***Exercice d’application 03:***

Soient deux nombres réelles non nuls et la fonction numérique définie par :

Déterminer sachant que est continue en .

1. **La continuité sur un intervalle :**

***Définition :***

|  |
| --- |
| * La fonction est continue sur l’intervalle ouvert , si est continue en tout points de .
* La fonction est continue sur l’intervalle ,si est continue sur l’intervalle et continue à droite en.
 |

***Remarque :***

* De même, on définit la continuité de sur les intervalles du type : .
* Géométriquement : si est continue sur l’intervalle , on peut tracer la courbe sans lever le crayon.
* Si est continue sur un intervalle , alors est continue sur tout intervalle inclus dans .
1. **Fonction partie entière :**

***Définition :***

|  |
| --- |
| La fonction **partie entière** est la fonction définie sur qui à tout réel associe l’entier relatif tel que : . On note cette fonction. |

***Exemples :***

***Conséquences :***

|  |
| --- |
| Soit , on a :* La fonction partie entière est continue à droite en et non continue à gauche en .
* La fonction partie entière est continue sur l’intervalle .
* La fonction partie entière est non continue en .
 |

**La représentation géométrique de la fonction partie entière :**

………………………………………………………….

1. **Continuité des fonctions usuelles:**
2. **Continuité de la fonction polynôme:**

***Exemple :***

Soit la fonction numérique définie sur par :

Etudier la continuité de en 0.

***Théorème :***

|  |
| --- |
| Toute fonction polynôme est continue sur tout intervalle inclus dans . |

1. **Continuité de la fonction rationnelle:**

***Exemple :***

Soit la fonction numérique définie par :

1. Déterminer le domaine de définition de .
2. Étudier sa continuité en 0.

***Théorème :***

|  |
| --- |
| Toute fonction rationnelle est continue sur tout intervalle inclus dansson domaine de définition. |

***Dans l’exemple précèdent :***

* est discontinue (non continue) sur l’intervalle car il n’est pas inclus dans .
* est continue sur l’intervalle car il est inclus dans .

***Propriété :***

|  |
| --- |
| * La fonction :
* La fonction :
* Les fonctions : sont continues sur
* La fonction : .

Où :  |

***Propriété :***

|  |
| --- |
| Soit une fonction définit sur un intervalle .Si est continue sur l’intervalle et positive sur alors la fonction est continue sur . |

***Exemple :***

Soit la fonction numérique définit sur l’intervalle par :

Etudier la continuité de sur .

1. **Opérations sur les fonctions continues :**

***Propriétés :***

|  |
| --- |
| Soient deux fonctions numériques, à variable réelle, définies sur un intervalle ouvert et un nombre réel.Si sont continues sur l’intervalle alors :* Les fonctions sont continues sur l’intervalle .
* Si la fonction est non nulle sur l’intervalle alors sont continues sur .
* La fonction est continue sur l’intervalle .
 |

***Exercice d’applications :***

1. Soit la fonction numerique définit sur l’intervalle par :

Montrer que est continue sur l’intervalle .

1. Soit une fonction numérique définie sur un intervalle.

Etudier la continuité de la fonction sur dans chacun des cas :

1. **Continuité de la composée de deux fonctions- théorème des valeurs intermédiaires :**
2. **Continuité de la composée de deux fonctions :**

***Propriété : (admise)***

|  |
| --- |
| Soient deux fonctions numériques, à variables réelle, définies, respectivement, sur deux intervalles ouverts tels que .Si est continue en un point de et si est continue en alors la fonction composée est continue en . |

***Exemple :***

Etudier la continuité de la fonction ) en 1.

***Conséquence :***

|  |
| --- |
| Soient deux fonctions numériques, à variables réelle, définies, respectivement, sur deux intervalles ouverts tels que .* Si est continue sur l’intervalle et si est continue sur l’intervalle , alors la fonction composée est continue sur l’intervalle .
 |

***Exemple :***

Montrer que la fonction est continue sur .

1. **Image d’un segment – image d’un intervalle par une fonction continue :**

***Propriété :***

|  |
| --- |
| * Si une fonction numérique est continue sur un intervalle , alors son image par est un intervalle.
* Si une fonction numérique est continue sur un segment , alors son image par est un segment , où et sont, respectivements, les valeurs minimale et maximale de sur le segment .
 |

**Géométriquement :**

Soit une fonction numérique continue sur , alors :

* est la valeur minimale de .
* est la valeur maximale de .



***Remarque :***

* Si l’imaged’un intervalle par une fonction n’est pas un intervalle, alors est non continue (discontinue) sur l’intervalle .
* L’image d’un intervalle par une fonction peut-être aussi un intervalle mais la fonction est discontinue sur . Donc la condition de la continuité de est suffisante et n’est pas nécessaire.
1. **Image d’un intervalle par une fonction continue et strictement monotone :**
2. **Si est une fonction strictement croissante :**

|  |  |
| --- | --- |
| **L’intervalle**  | **L’intervalle**  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

1. **Si est une fonction strictement décroissante :**

|  |  |
| --- | --- |
| **L’intervalle**  | **L’intervalle**  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

***Exercice d’application 01 :***

Soit la fonction numérique définie par :

1. Déterminer l’ensemble de définition de .
2. Etudier la monotonie de sur l’intervalle .
3. Déterminer l’image de l’intervalle par la fonction .

***Exercice d’application 02 :***

Déterminer dans chacun des cas suivants :

1. **Théorème des valeurs intermédiaires :**

***Théorème :***

|  |
| --- |
| Si une fonction est continue sur un intervalle , alors pour tout nombre réel compris entre il existe au moins un nombre tel que . |



***Propriété :***

|  |
| --- |
| Si une fonction est continue sur un intervalle , alors pour tout nombre réel compris entre : l’équation ,admet **au moins** une solution. |

***Propriété :***

|  |
| --- |
| Si une fonction est continue et strictement monotone sur un intervalle , alors pour tout nombre réel compris entre il existe un **seule** nombre tel que . Autrement dit ; l’équation admet **une seule** solution sur . |

***Conséquences :***

**Conséquence 01 :**

|  |
| --- |
| Si une fonction est continue sur un intervalle et , alors l’équation admet **au moins une solution** sur . |



**Conséquence 02 :**

|  |
| --- |
| Si une fonction est continue et strictement monotone sur un intervalle et , alors l’équation admet **une seule** solution sur . |



***Exemple :***

On montre que l’équation admet au moins une solution dans l’intervalle .

***Exercice d’application :***

1. Montrer que les deux équationssuivantes admettent au moins une solution dans , dans chacun des cas :
2. Montrer que l’équation admet une seule solution dans l’intervalle .
3. **Utiliser la dichotomie pour encadrer les solutions de l’équation :**

***Exercice :***

Soit la fonction numérique définie sur l’intervalle par : .

1. Montrer que l’équation admet une seule solution dans l’intervalle .
2. Vérifier que le nombre est le centre de l’intervalle , puis calculer , et déduire que : .
3. Calculer , et déduire un autre encadrement de .
4. Par la même méthode, donner un encadrement de d’amplitude.
5. **Fonction réciproque d’une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle :**

***Propriété :***

|  |
| --- |
| Si est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle , alors pour tout , l’équation admet une seule solution dans l’intervalle . |

***Activité :***

Soit la fonction numérique définie sur l’intervalle par :

1. Montrer que la fonction est continue et strictement monotone sur .
2. Déterminer l’intervalle l’image de par .
3. Soient , montrer que : .

***Définition :***

|  |
| --- |
| Soient est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle et l’image de par la fonction .La relation qui à chaque élément de l’intervalle associe l’élément de l’intervalle tel que , est une fonction définie de vers . Cette fonction est appelée **la fonction réciproque** de la fonction, elle est notée**.** |

***Conséquences :***

Soit une fonction continue et strictement monotone sur l’intervalle et son fonction réciproque, on a :

***Exercice d’application*** :

Soit la fonction définit sur par :.

1. Montrer que la fonction admet une fonction réciproque sur .
2. Déterminer pour tout.
3. Tracer les courbes représentatives, respectivement, de dans un repère orthonormé .
4. Que déduisez-vous ?

***Propriétés de la fonction réciproque :***

|  |
| --- |
| Si est une fonction continue et strictement monotone sur l’intervalle et sa réciproque, alors :* La fonction est **continue** sur .
* La fonction est strictement monotone sur et elle a **le même sensde variation** que .
* La courbes représentatives de et , dans le plan muni d’un repère orthonormé, sont **symétriques** par rapport à la bissectrice (la droite d’équation ).
 |

***Remarque :***

Si .

***Exercice d’application :***

Soit la fonction numérique définie sur l’intervalle par :

1. Montrer que la fonction admet une fonction réciproque définie sur l’intervalle , et déterminer .
2. Déterminerpour tout .
3. Tracer dans un repère orthonormé les courbes .
4. **Fonction racine :**

(Utilisant la fonction d' exercice précèdent)

***Propriété :***

|  |
| --- |
| Soit un nombre entier naturel non nul.La fonction définie sur vers admet une fonction réciproque continue et strictement croissante sur . |

***Définition :***

|  |
| --- |
|  La fonction réciproque de la fonction définie sur vers est appelée fonction **racine**  et est notée . |

Onpose pour tout

***Exemples :***

* est la fonction racine ( la fonction racine carrée).
* est la fonction racine ( la fonction racine cube).

***Propriété :***

|  |
| --- |
| * La fonction racine est continue et strictement croissante sur et .
* La courbe de la fonction est le symétrie da celle de la fonction par rapport à la première bissectrice.
 |

***Conséquences :***

|  |
| --- |
| Soit un entier naturel non nul.* .
* .
* .
* .
 |

***Exemples :***

1. **Résoudre l’équation :**

On résoudre dans les équations suivantes :

1. **Opérations sur les racines :**

***Propriété :***

|  |
| --- |
| Soient et . |

***Exercice d’application :***

1. Simplifier les expressions suivantes :
2. Comparer les deux nombres :.
3. Résoudre dans l’équation :.
4. Résoudre dans l’inéquation :.
5. **Continuité et limite de la composer d’une fonction et la fonction racine :**

Si est une fonction définie et positive sur l’intervalle alors :

***Propriété : (admise)***

|  |
| --- |
| Soient une fonction numérique définie sur un intervalle et positive sur et * Si la fonction est continue sur l’intervalle alors la fonction est continue sur .
* Si alors : .
* Si alors :.
 |

***Remarque :***

Ces deux dernières propriétés restent vraisquand tend vers à droite ou à gaucheet quand tend vers .

***Exemples :***

.

***Exercice d’application :***

1. Montrer que la fonction est continue en tout point de son domaine de définition tel que:
2. Calculer les limites suivantes :
3. **Puissance rationnelle d’un nombre réel strictement positif :**

***Définition :***

|  |
| --- |
| Soient un nombre réel strictement positif et un nombre rationnel non nul.**La puissance rationnelle** est le nombre d’exposant qu’on le note et définie par : . |

***Remarque :***

* Pour tous et pour tout on a : .
* Si , alors pour tout on a : .

***Exemples :***

***Conséquences :***

***Propriétés :***

|  |
| --- |
| Soient et : on a : |

***Remarque :***

La fonction numérique définit sur par est la composer de deux fonctions définies sur par .

***Limites de la fonction : :***

|  |
| --- |
| * Si
* Si :
 |

***Exercice d’application :***

1. Simplifier les nombres suivants :
2. Soit un nombre réel avec :

Ecrit se forme d’une puissance rationnelle d’exposant un nombre rationnel strictement positif.

1. Ecrit le nombre se forme d’une puissance, tel que :
2. Résoudre dans les équations :

**Réaliser par : P.Mohamed OUTIDIR**

**lycée el wourod kalaat megouna**