Exercice 1: Déterminer la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes :

P_1: $\frac{16}{5}=3,2$; P_2: $\frac{16}{3}=3,2$; P_3: $\frac{1}{\sqrt{5}-1}=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$; P_4: $|2-\sqrt{3}|=2+\sqrt{3}$

P_5: $(1=2)$ *et* $\left(\frac{1}{5}=\frac{5}{25}\right)$; P_6: $(1=2)$ *et* $\left(\frac{1}{5}=\frac{5}{25}\right)$;$P_7$: $(1=2)$*ou*$\left(\frac{1}{5}=\frac{5}{25}\right)$

$$P_8: \left(|2-\sqrt{3}|=2+\sqrt{3}\right) \ ou \ \left(\frac{1}{5}=\frac{5}{25}\right)$$

P_9: $\left(\frac{1}{\sqrt{5}-1}=\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right) \Rightarrow \left(\frac{1}{5}=\frac{5}{25}\right)$; P_{10}: $\left(\frac{1}{\sqrt{5}-1}=\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right) \Rightarrow \left(|2-\sqrt{3}|=2+\sqrt{3}\right)$

P_{11}: $\left(\frac{1}{\sqrt{5}-1}=\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right) \Leftrightarrow \left(\frac{16}{5}=3,2\right)$; P_{12}: $\left(\frac{16}{3}=3,2\right) \Leftrightarrow \left(|2-\sqrt{3}|=2+\sqrt{3}\right)$

Exercice 2: Donner la négation de chacune des propositions suivantes :

P_1: $\exists x \in \mathbb{R}^+ \ x^3=8$; P_2: $\forall x>0 \quad \frac{1}{x}+x \geq 2$

P_3: $\exists a>0 \ \exists b>0 \quad 2ab=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$; P_4: $\exists x \in \mathbb{R}^*(x^2=5 \ ou \ x^2>10)$

P_5: $\forall x \in \mathbb{R}^* \left(\frac{1}{x}+x=2 \Rightarrow x=1\right)$; P_6: $\forall x \in \mathbb{R}^*(x^2=0 \Leftrightarrow x=0)$

P_7: $(1 \leq 2)$ *et* $\left(\frac{1}{5}=\frac{5}{25}\right)$; P_8: $(1=2)$ *et* $\left(\frac{1}{5}=\frac{5}{25}\right)$

; P_9: $(1=2)$ *ou* $\left(\frac{1}{5}=\frac{5}{25}\right)$; P_{10}: $\left(|2-\sqrt{3}|=2+\sqrt{3}\right)$ *ou* $\left(\frac{1}{5}=\frac{5}{25}\right)$

P_{11}: $\left(\frac{1}{\sqrt{5}-1}=\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right) \Rightarrow \left(\frac{1}{5}=\frac{5}{25}\right)$; P_{12}: $\left(\frac{1}{\sqrt{5}-1}=\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right) \Rightarrow \left(|2-\sqrt{3}|=2+\sqrt{3}\right)$

$$P_{13}: \forall (x,y) \in \mathbb{R}(y+x \leq 1) \Rightarrow (x^2+y^2 \leq 2)$$

P_{14}: $\left(\frac{16}{3}=3,2\right) \Leftrightarrow \left(|2-\sqrt{3}|=2+\sqrt{3}\right)$

Exercice 3 : Ecrire les propositions suivantes en utilisant des symboles logiques convenables :

1) (P) : « Pour tout entier naturel n, il existe un nombre réel t tel que la racine carrée de n est égale à t »

2) (Q) : « Pour tous nombres réel x et y , il existe un entier naturel p , tel que la somme des carrés de x et de y est égale au cube du nombre p »

3) (R) : « le système formé par les deux équations **3x - 2y = 5** et **x + y = -3** admet au moins une solutions dans $\mathbf{IR^2}$ » .

Exercice4: On considère les propositions suivantes :

$\mathbf{T}:(\forall x\in IR),\ x<1 \Rightarrow x^2<1$; $\mathbf{P}:(\forall x\in IR)\ 3x^2-4x+5\leq 0$

1- Donner la négation de T et P.

2- Déduire que les propositions T et P sont fausse.

Exercice5: En utilisant le raisonnement par la contraposée montrer que :

1- $\forall (x,y)\in IR^2:\left[(y\neq x \ et\ x+y\neq 1)\Rightarrow\left(\sqrt{x^2-x+1}\neq\sqrt{y^2-y+1}\right)\right]$

2- $\forall (x,y)\in IR^2:\left[(x\neq y\ \ et\ \ x\times y\neq 1)\Rightarrow\left(\frac{x}{x^2+x+1}\neq\frac{y}{y^2+y+1}\right)\right]$

3- $\forall (x,y)\in IR^{*2}:\left[(x\neq y\ \ et\ \ x\times y\neq 2)\Rightarrow\left(\frac{x^2+2}{x}\neq\frac{y^2+2}{y}\right)\right]$

4- $\forall (x,y)\in IR^2:[(x\neq 1\ \ et\ \ y\neq 1)\Rightarrow(xy+1\neq x+y)]$

Exercice6: En utilisant raisonnement par les équivalences successives montrer que :

1- $\forall x\in IR\ :\ \sqrt{x^4+3x^2+1}\geq x^2+1$

2- $\forall x\in IR^*\ :\ \frac{x+\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+1}\leq\sqrt{x}+3$

3- $\forall x\in IR^*\ :\ \frac{4x}{x^2+4}\leq 1$

4- $\forall x\in IR_+^2\ :\ 9x+4y\geq 12\sqrt{xy}$

Exercice 7: En utilisant le raisonnement par récurrence montrer que :

1- Le nombre 7^n-2^n est divisible par 5 pour tout entier naturel n.

2- Le nombre $3^{3n+2}-2^{n+2}$ est divisible par 5 pour tout entier naturel n.

3- $\forall x\in IN\quad 1+11^1+11^2+\cdots\ldots\ldots\ldots+11^n=\frac{1}{10}(11^{n+1}-1)$

4- $\forall x\in IN\quad 1+7^1+7^2+\cdots\ldots\ldots\ldots+7^n=\frac{1}{6}(7^{n+1}-1)$

5- $\forall x\in IN\quad 5^0+5^1+5^2+\cdots\ldots\ldots\ldots+5^n=\frac{1}{4}(5^{n+1}-1)$

Exercice 8: En utilisant le raisonnement cas par cas montrer que :

1- $\forall n\in IN\quad n+n^2$ **est un nombre pair .**

2- $\forall x\in IR\quad |x-1|=x-1.$

3- $\forall x\in IR\quad |x-1|+|x+1|\geq 2.$