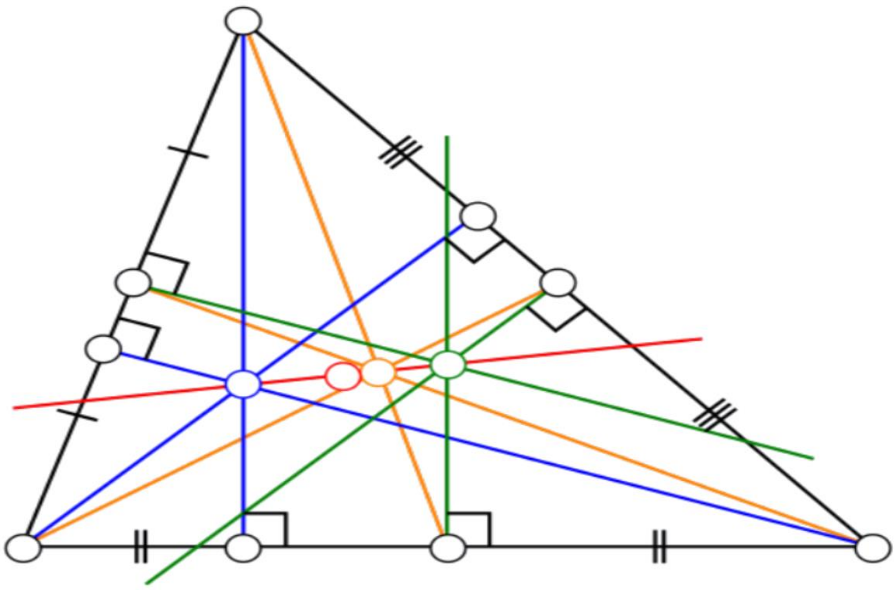
Droites remarquables dans les triangles

WWW.Dyrassa.com

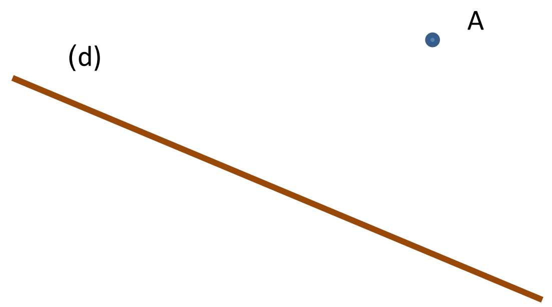


-Réalisé par :

ENNASSIRI Zakaria

Énigme du chapitre.

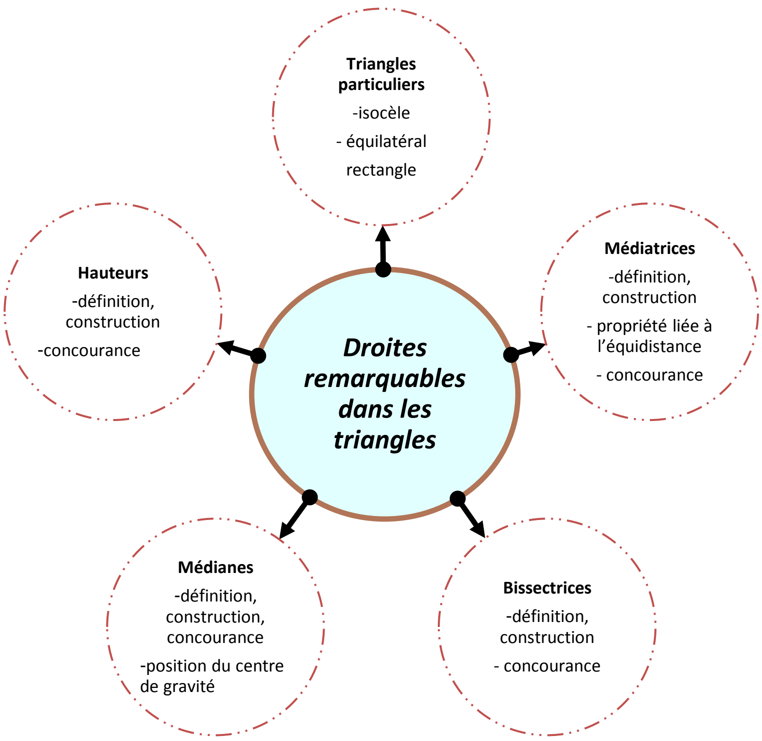
Soit (d) une droite du plan et A un point n'appartenant pas à la droite (d).



Où faut-il placer les points B et C sur la droite (d) pour que le triangle ABC soit équilatéral?   Détailler la construction.

CONTENUS	COMPETENCES EXIGIBLES	SUJET
Droites remarquables d'un triangle. **Médiatrices d'un triangle** **Médiatrices d'un triangle** **Hauteurs d'un triangle** **Bissectrices d'un triangle** **Triangles particuliers.**	Construire les bissectrices, les hauteurs, les médianes, les médiatrices d'un triangle ; en connaître une définition et savoir qu'elles sont concourantes. On pourra étudier la position du point de concours de la médiane sur chacune d'elles.	Les théorèmes sur les droites concourantes étant déjà en place, présenter deux séries d'exercices sur ce thème : - l'autre de démonstration - l'une de construction Choisir une des deux séries, donner l'utilisation que vous feriez de cette série avec vos élèves. Vous préciserez pour chaque exercice vos objectifs et la gestion de la classe envisagée

Situation par rapport au programme du collège

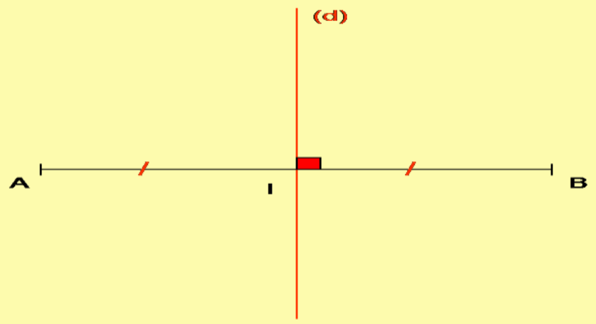


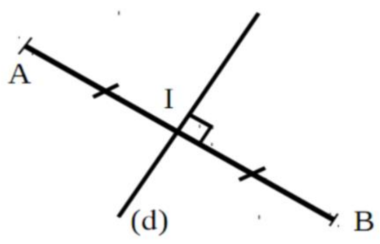
I/ Médiatrices d'un triangle

1. La médiatrice des côtés (RAPPELS)

Définition :

La médiatrice *d'un segment [AB] est la droite qui est perpendiculaire à la droite (AB) et qui passe par le milieu du segment [AB].*





Si (d) médiatrice de [AB], alors :
- **(d) ⊥ (AB)**
- **et**
- **I milieu de [AB]**

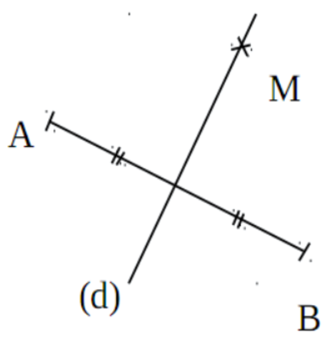
La médiatrice *d'un segment [AB] est l'axe de symétrie du segment [AB].*

Si (d) médiatrice *de [AB], alors A et B sont symétriques par rapport à (d).*

b) Propriétés

Propriété 1

Si un point est sur la médiatrice d'un segment, alors il est équidistant des extrémités du segment.



Données

(d) médiatrice de [AB]

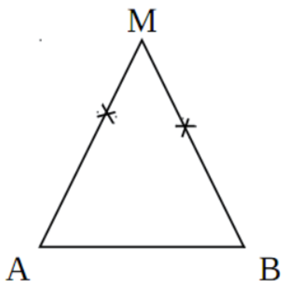
M ∈ (d)

Conclusion

MA = MB

Propriété 2

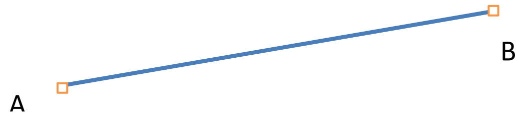
Si un point est équidistant des extrémités d'un segment, alors il est sur la médiatrice de ce segment.



Données
MA = MB
Conclusion
M appartient à la Médiatrice de [AB].

Exemple

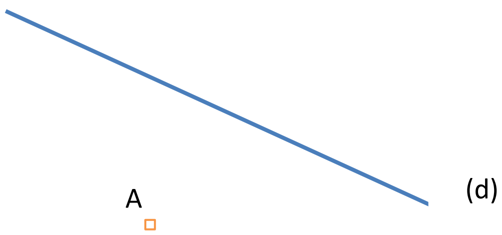
1. *Comment note-t-on la médiatrice de ce segment [CD] ci-dessous ?*
2. *Tracer en bleu med [CD] au compas et à la règle.*



☐ N'oubliez pas le double-codage de la figure

Exercice 1 :

1. Ci-dessous, placer le point B de telle sorte que la droite (d) soit la médiatrice de [AB].
2. Comment sont les points A et B par rapport à (d) la médiatrice de [AB] ?
3. Placer un point M sur med [AB].
Quel est la nature du triangle AMB ?



2. Médiatrices d'un triangle

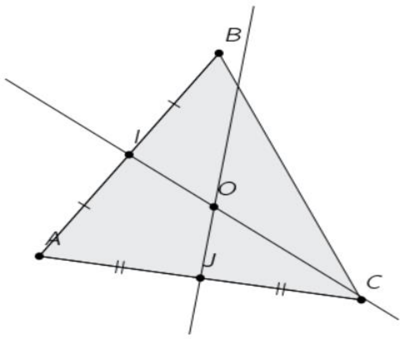
Activité A. Construire le centre circonscrit d'un triangle

Partie A : Expérimentation

1. Construire un triangle dont les côtés ont pour longueurs 12 cm, 9 cm et 10 cm.
2. Construire les médiatrices de deux côtés .Noter O leur point d'intersection.
3. Construire le cercle de centre O passant par l'un des sommets .Que constate-t-on?
4. Construire la médiatrice du troisième côté .Que constate-t-on?

Partie B : Démonstration

Sur la figure ci-dessous, les médiatrices des segments [AB] et [AC] se coupent en O.



1. Recopier et compléter en justifiant :

*(a) « O appartient à la médiatrice de [AB] **donc** OA = ……………… »*

*(b) « O appartient à la médiatrice de [AC] **donc** OA = ……………… »*

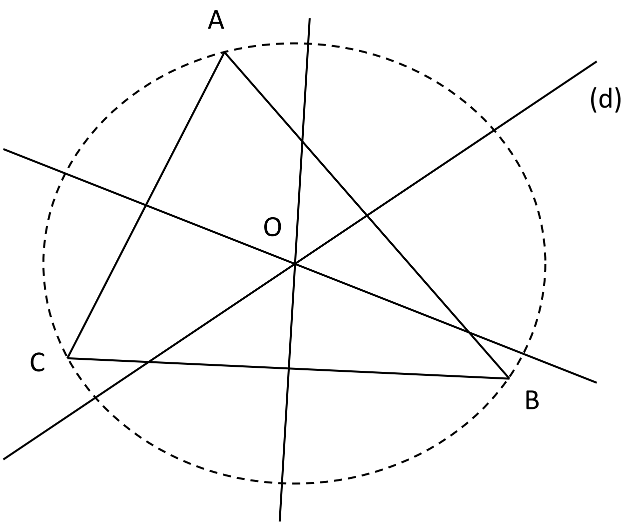
2. Expliquer alors pourquoi:

(a) le cercle de centre O passant par A passe aussi par B et C .

(b) le point O appartient à la médiatrice de [BC].

Propriétés :

— Les médiatrices des trois côtés d'un triangle se coupent en un même point :on dit qu'elles Sont concourantes.
— Ce point commun est le centre d'un cercle passant par les trois sommets du triangle. On
Dit que ce cercle est le cercle circonscrit au triangle.

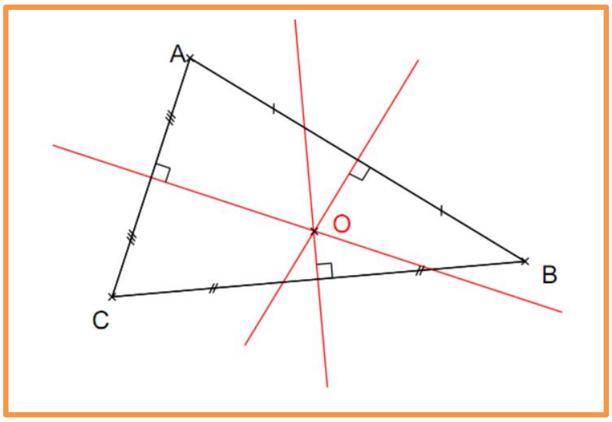


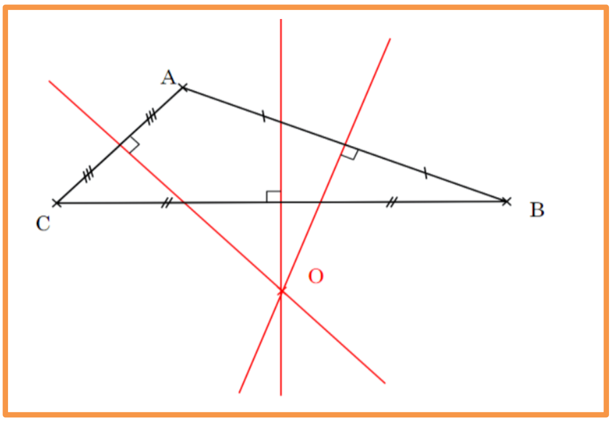
Le point O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

Remarque :

1^er cas : *Si les 3 angles du triangle sont aigus, alors le centre du cercle circonscrit au triangle est à l'intérieur du triangle.*

2^er cas : *Si l'un des angles est obtus, alors le centre du cercle circonscrit au triangle est à l'extérieur du triangle.*

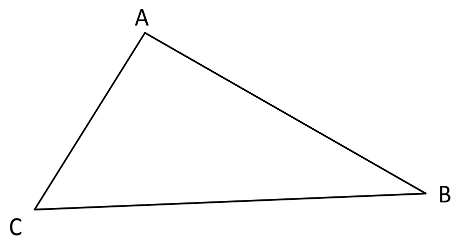




Exemple

Construire le cercle circonscrit au triangle ABC

Il suffit de tracer ………… médiatrices !



Exercice 1 :

Tracer le triangle POU rectangle en O tel que PU = 5 cm et PO= 3 cm et $\widehat{PUO}$= 30°.

Construire en couleur le cercle circonscrit au triangle POU.

Où semble se trouver le centre de ce cercle ?

Exercice 2

Le maire du village a décidé de construire une fontaine à égale distance des trois maisons A, B et C. Où doit-il la placer précisément ?

II/ Hauteurs d’un triangle

ActivitéB. Hauteurs d’un triangle

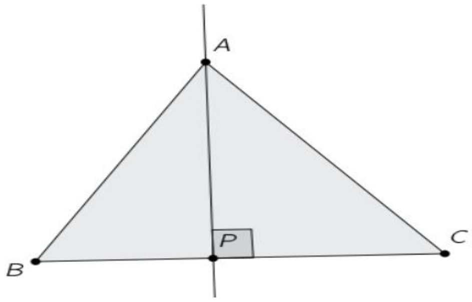
1. Construire un triangle ABC tel que AB = 6 cm, BC = 8 cm et AC = 12 cm.
2. Dans un triangle ABC, on dit que (AT) est une hauteur du triangle issue du point A si T ∈ [BC] et (AT) est perpendiculaire à (BC) (cette droite passe donc par le sommet A Du triangle).
Construire la hauteur issue de A et la hauteur issue de B. On note H leur point d’intersection.
3. Que peut-on conjecturer pour la droite (CH) ?

Définition :

La hauteur *issue d’un sommet du triangle est la droite qui passe par ce sommet et qui est perpendiculaire au côté opposé. On parle aussi de hauteur relative à un coté.*

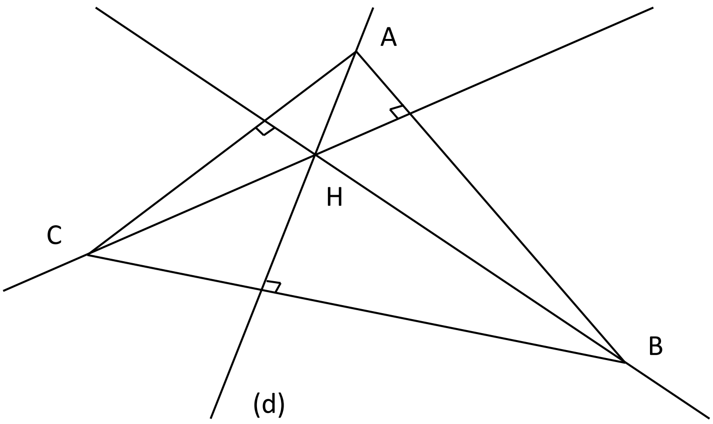
Exemple

— (AP) est la hauteur issue de A ou relativ
— P est le pied de la hauteur.
— Le terme hauteur désignera aussi bien l
droite (AP),le segment [AP] ou la longueur



Propriété

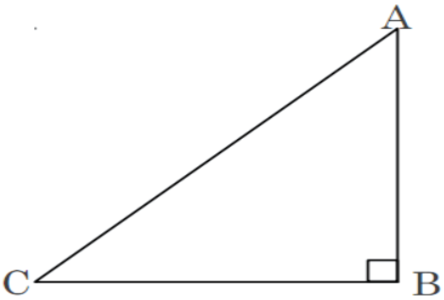
— Les trois hauteurs d’un triangle ont concourantes en un point H.
— On dit que ce point commun H est l’orthocentre du triangle.



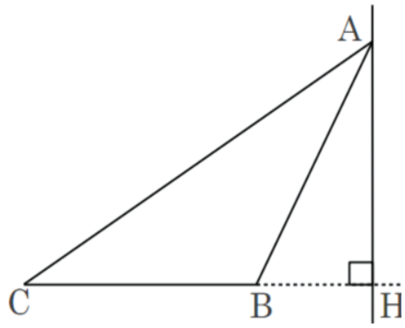
Le point H est l’orthocentre du triangle ABC

Remarques :

1) Quand le triangle est rectangle, les hauteurs relatives aux côtés de l'angle droit sont les côtés eux-mêmes. Exemple sur la figure ci-dessus : la hauteur relative au côté [BC] est la droite (AB).



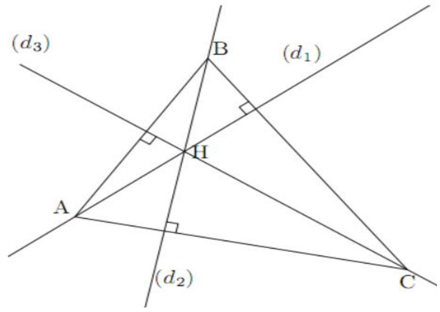
2) Quand le triangle possède un angle obtus, il faut prolonger les côtés de cet angle pour en tracer la hauteur. Exemple sur la figure ci-dessus : la hauteur relative au côté [BC] est la droite (AH) avec H n'appartenant pas au segment [BC].



Exemple

Dans le triangle ABC, les hauteurs (d1), (d2) et (d3) issues respectivement de A, B et C se coupent en H, orthocentre du triangle. On a :

(AH) ⊥ (BC) ;; (BH) ⊥ (AC) ;; (CH) ⊥ (AB)



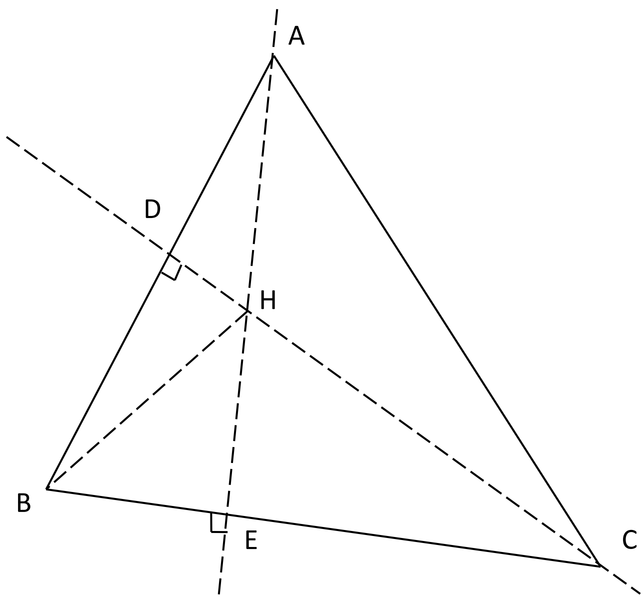
Exercice 1 :

1. *Dans le triangle ABC :*

a. Quelle est la hauteur issue de A ?
b. Quelle est la hauteur relative à [AC] ?
c. Quelle est la hauteur issue de C ?
d. Quel est l'orthocentre du triangle

2. *Dans le triangle BCH :*

a. Quelle est la hauteur relative à [BC] ?
b. Quelle est la hauteur issue de B ?
c. Quelle est la hauteur relative à [BH] ?
d. Quel est l'orthocentre du triangle ?



3. Dans le triangle ABH :

a. Quelle est la hauteur relative à [AB] ?

b. Quelle est la hauteur relative à [AH] ?

c. Quelle est la hauteur relative à [BH] ?

d. Quel est l'orthocentre du triangle ?

Exercice 2 :

1) Construire un triangle IJK tel que IJ =6cm, JK =4cm et IK =8cm.
2) Placer le point L tel que IJKL soit un parallélogramme.
3) Dans le triangle IJK, tracer les hauteurs issues de I et de J.
4) On appelle M le point d'intersection de ces deux hauteurs.

Que peut-on dire du point M ?

5) Montrer que (IJ) est perpendiculaire à (KM).
6) Quelle est la nature du triangle KLM ? Justifier.

III/ Médianes d'un triangle

Activité C. Médiatrices d'un triangle

1. Construire un triangle ABC tel que AB = 14 cm, BC = 12 cm et AC = 10 cm.
2. Dans un triangle ABC, on dit que (AI) est une médiane issue du point A si I est le milieu de [BC] (cette droite passe par le sommet A du triangle).

Construire la médiane issue du point A et la médiane issue du point B. On note G leur Point d'intersection.

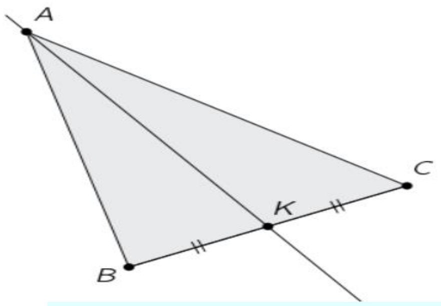
3. Que peut-on conjecturer pour la droite (CG) ?
4. Placer les milieux respectifs A', B', C' de [BC] , [AC] , [AB] . Mesurer les longueurs AG , GA', BG , GB' , CG et GC' Quelle remarque peut-on faire?

Définition :

Une médiane d'un triangle est un droite qui passe par un sommet et le milieu du côté opposé.

Exemple :

(d) est la médiane relative au coté [BC] ou la médiane issue du sommet A.

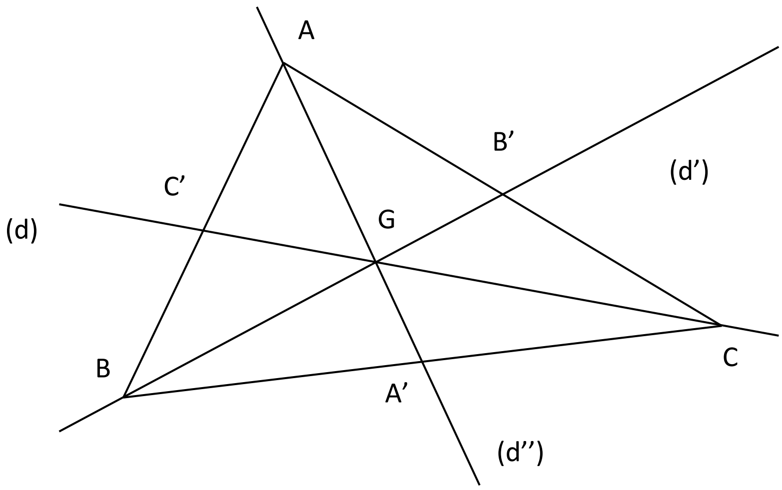


Médiane issue du point A.

Propriété

1. Les trois médianes d'un triangle sont concourantes en un point G.

2. On dit que ce point commun G est le centre de gravité du triangle.



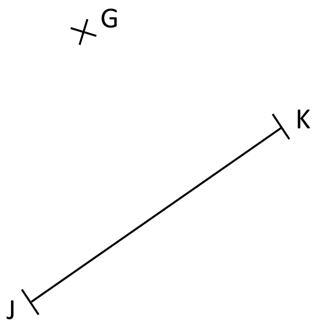
Le point G est le centre de gravité du triangle ABC.

Remarque :

Si dans un triangle, un point est l'intersection de deux médianes, alors Il est situé aux deux tiers de chaque médiane à partir des sommets.

C'est à dire :

$AG = \frac{2}{3} AA'$ // $BG = \frac{2}{3} BB'$ // $CG = \frac{2}{3} CC'$



Exercice 1

G est le centre de gravité d'un triangle IJK. Construire le point I.

IV/Bissectrices d'un triangle

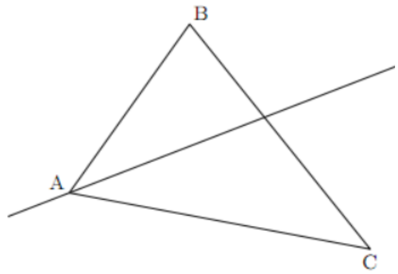
1. Bissectrices d'un angle (RAPPELS)

Définition :

La bissectrice d'un angle est la droite qui partage l'angle en deux angles égaux

Exemple :

Dans le triangle ABC, la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ est la droite coupant cet angle en deux angles de même mesure.

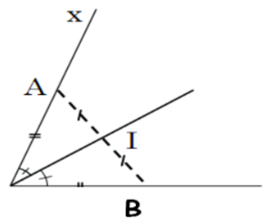


Remarque :

Plusieurs constructions possibles pour tracer La **bissectrice d'un angle :**

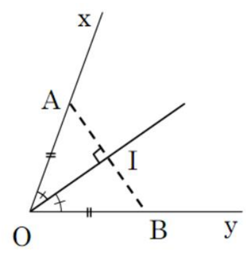
1. ***Avec la règle graduée :***

Placer A sur [Ox) et B sur [Oy) tels que OA = OB
Placer le milieu I de [AB]
(OI) est la bissectrice de $\widehat{xOy}$



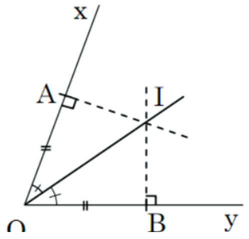
2. ***Avec une équerre graduée 1***

Placer A sur [Ox) et B sur [Oy) tels que OA = OB La perpendiculaire à (AB) passant par O coupe (AB) en I.
(OI) est la bissectrice de $\widehat{xOy}$



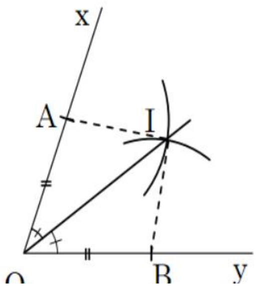
3. Avec une équerre graduée 2

Placer A sur [Ox) et B sur [Oy) tels que OA = OB
La perpendiculaire à [Ox) passant par A et la perpendiculaire à [Oy) passant
par B se coupent I.
(OI) est la bissectrice de $\widehat{xOy}$



4. Avec le compas

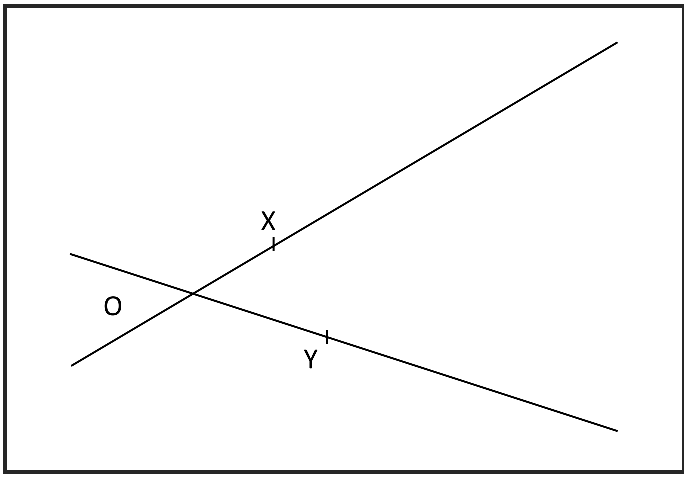
Tracer un arc de centre O qui coupe [Ox) en A et [Oy) en B De même rayon, tracer un arc de centre A et un autre de centre B qui se coupent en I. (OI) est la bissectrice de $\widehat{xOy}$

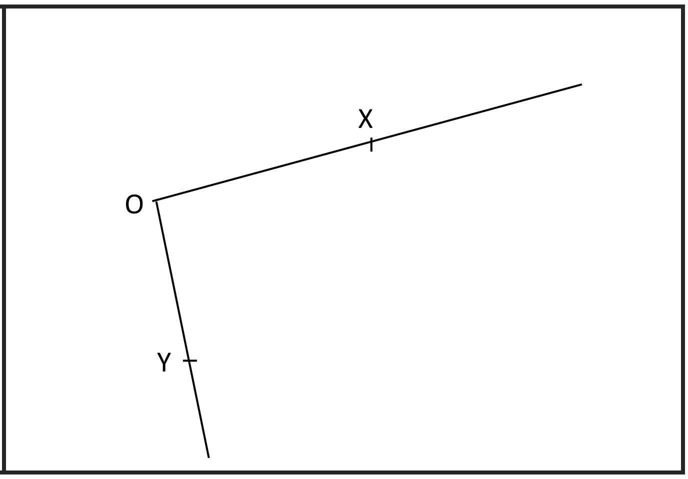


Exercice

Pour chaque angle XÔY construis avec le compas sa bissectrice (OZ)

Mesure les angles XÔZ, ZÔY et XÔY et code les angles égaux.
Ecris au bas de la page la définition de la bissectrice d'un angle.

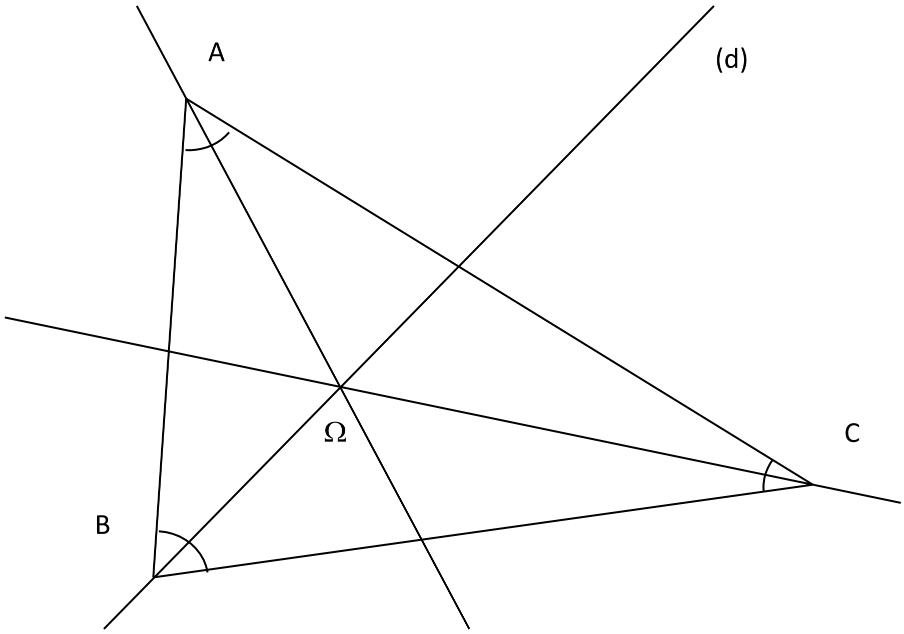




2. Bissectrices des angles d'un triangle

Propriété :

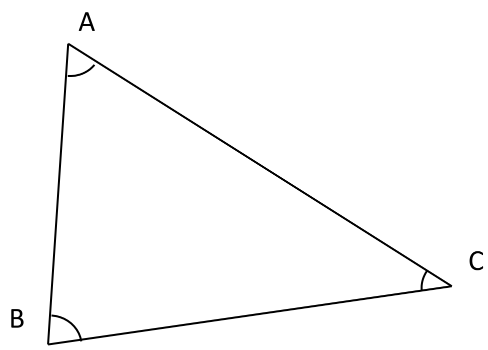
Cas général Dans un triangle, les trois bissectrices sont concourantes (elles passent par un méme point) : le point de concours I est le centre du cercle inscrit du triangle.
Le cercle inscrit est tangent aux côtes du triangle en trois points qui ne sont en général pas situés sur les bissectrices.



Le point Ω est le centre du cercle inscrit du triangle ABC

Exercice

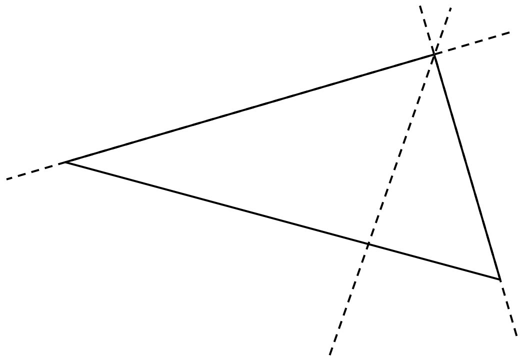
Soit le triangle ABC ci-contre.
Tracer les bissectrices ainsi que le cercle inscrit dans le triangleABC .



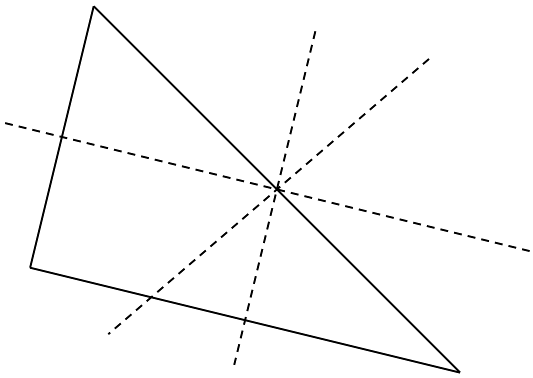
V/ Triangles particuliers.

A. Dans un triangle rectangle…

*les hauteurs issues des **« sommets des angles aigus** » sont **confondues** avec les cotés de l'angle droit.*



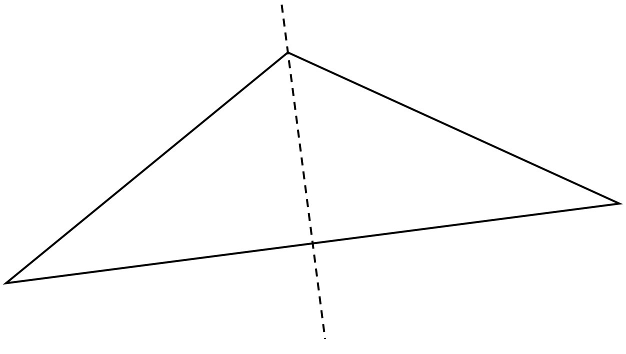
*les 3 **médiatrices sont concourantes en un point** qui est **le milieu** de l'hypoténuse.*



B. Dans un triangle isocèle

***les 4 droites remarquables issues du sommet principal** sont confondues.*

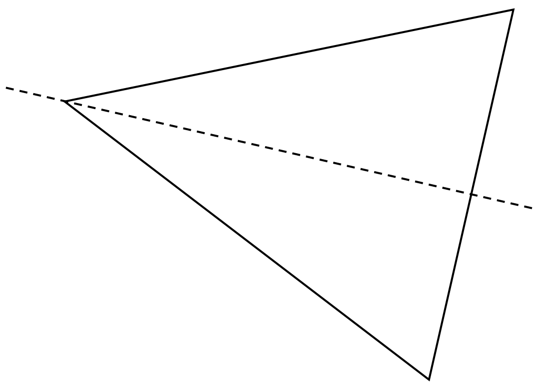
(C'est l'axe de symétrie du triangle isocèle).



c. Dans un triangle équilatéral

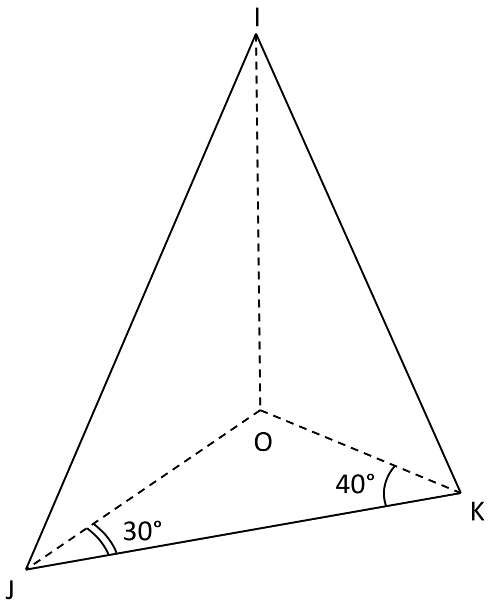
les 4 droites remarquables issues de chaque sommet sont confondues.

(Ce sont les 3 axes de symétrie du triangle équilatéral).



Exercice 1 :

O est le point de concours des bissectrices du triangle IJK. On sait que $\widehat{OKJ} = 40°$ et $\widehat{OJK} = 30°$



a. Calculer : $\widehat{OJI}$ =...... ; $\widehat{OKI}$ =......

b. En déduire : $\widehat{IJK}$ =...... ; $\widehat{IKJ}$ =.......

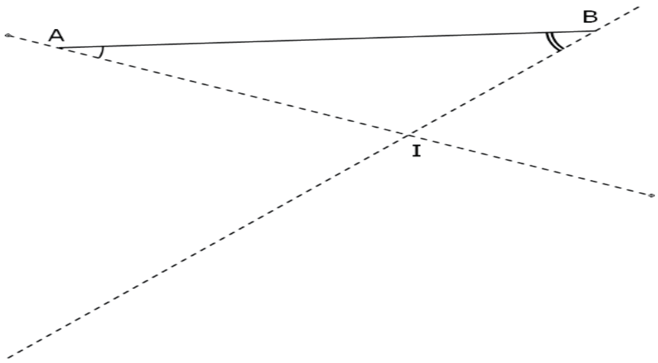
c. En déduire : $\widehat{JIK}$ =....... ; $\widehat{OIJ}$ =....... ; $\widehat{OIK}$ =......

d. En déduire : $\widehat{KOJ}$ =...... ; $\widehat{IOJ}$ =...... ; $\widehat{IOK}$ =......

Exercice 2 :

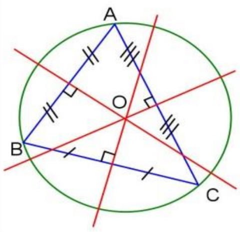
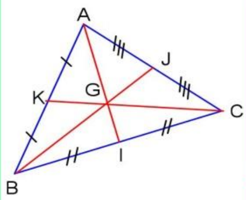
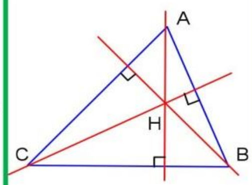
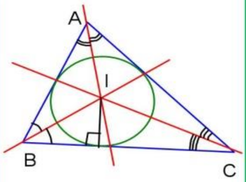
I est le point de concours des bissectrices du triangle ABC.

Construire le point C.



Résumé de cours

Les droites remarquables du triangle

	Médiatrices **الواسطات**	**Médianes** **المتوسطات**	**Hauteurs** **الإرتفاعات**	**Bissectrices** **المنصفات**
Définitions **تعاريف**	La médiatrice d'un segment est la droite perpendiculaire à ce segment et qui passe par son milieu	Dans un triangle, une médiane est un segment qui joint un sommet au milieu du côté opposé.	Dans un triangle, une hauteur est une droite qui passe par un sommet et qui est perpendiculaire au côté opposé.	La bissectrice d'un angle est la droite qui le partage en deux angles de même mesure.
Figures **الشكل**				
Points de concours **نقطة التقاطع**	**Centre du cercle circonscrit au triangle** **مركز الدائرة المحيطة بالمثلث**	**Centre de gravité** **مركز الثقل**	**Orthocentre** **مركز التعامد**	**Centre du cercle inscrit dans le triangle** **مركزالدائرة المحاطة بالمثلث**
Propriétés **خصائص**	OA = OB = OC Le point de concours des médiatrices est équidistant des trois sommets du triangle.	**Propriété des « 2/3 – 1/3 » :** $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$ $\overrightarrow{GB}=-2\overrightarrow{GI}$ $\overrightarrow{GK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CK}$ **Le centre de gravité est situé au 2/3 de chaque médiane à partir du sommet.**		

Théorèmes :

1) Dans un triangle, les trois médiatrices ; médianes ; bissectrice
Sont concourantes .
2) Dans un triangle isocèle, la médiane, la hauteur et la bissectrice
issues du sommet principal sont confondues avec la médiatrice du côté opposé .
3) Dans un triangle équilatéral, le centre du cercle circonscrit, le centre de gravité, l'orthocentre et le centre du cercle inscrit sont confondus