

SUITES NUMERIQUES

1) GENERALITES

A) DEFINITION et NOTATIONS

On appelle **suite numérique** toute application de \mathbb{N} dans \mathbb{R} .

Une suite se note u , $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(u_n)_{n \geq 0}$ ou (u_n) , qui est la notation la plus utilisée.

On note u_n l'**image** de l'entier naturel n . (*plutôt que $u(n)$...*)

On dit que u_n est le **terme général** de la suite (u_n) , le **terme de rang n** ou le **terme d'indice n** .

u_0 est le **terme initial** de la suite (u_n) .

• (u_n) désigne une suite.

• u_n désigne un nombre

Comment présenter une suite :

- On peut présenter une suite sous forme de liste : « on considère la suite $(1, 2^2, 3^2, \dots, n^2, \dots)$ »
- Le plus souvent, on la présente par son terme général : « soit (u_n) la suite définie par $u_n = n^2$ »

Ex :

- Soit (u_n) la suite définie par $u_n = 3n + 10$
Le terme d'indice 2 est $u_2 = 16$, le terme d'indice 10 est $u_{10} = 40$, le terme d'indice $2n$ est $u_{2n} = 6n + 10$...
- La suite des nombres impairs a pour terme général $u_n = 2n + 1$.

Complément :

Une suite peut n'être définie qu'à partir d'un certain rang n_0 ; on la note parfois $(u_n)_{n \geq n_0}$, et son **terme initial** est u_{n_0}

- La suite de terme général $u_n = \sqrt{n-4}$, n'est définie que pour $n \geq 4$, on la note $(u_n)_{n \geq 4}$
- La suite de terme général $u_n = \frac{1}{n}$, n'est définie que pour $n \geq 1$, on la note $(u_n)_{n \geq 1}$

Rem : Comme pour les fonctions, on omet souvent de préciser l'ensemble de définition ... attention.

B) DIFFERENTES FACONS DE DEFINIR UNE SUITE ...

a) PAR UNE FORMULE EXPLICITE

On peut définir une suite par une **formule explicite**, qui permet de calculer directement à partir de n le terme d'indice n .

Ex :

- La suite (u_n) définie par $u_n = 5^n$
- La suite (v_n) définie par $v_n = 3n^2 + 5$

CAS PARTICULIER IMPORTANT :

Soit f une fonction définie sur $[0; +\infty[$. (au moins).

On définit une suite (u_n) en posant, pour tout entier naturel n , $u_n = f(n)$.

On dispose alors, à partir de la courbe représentative de la fonction f , d'une représentation graphique de la suite (u_n) .

Sur l'axe des ordonnées, on peut lire les termes u_0, u_1, u_2, \dots

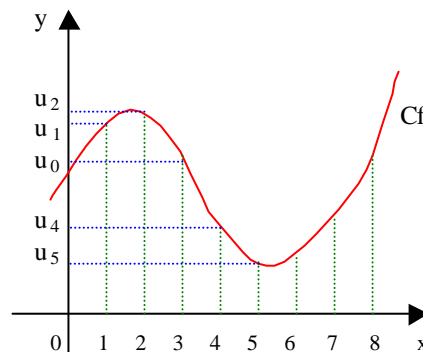
Ex : Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f : x \mapsto 3x^2 + 2x + 5$

et (u_n) la suite définie par $u_n = f(n)$

Ainsi pour tout entier naturel n , on a : $u_n = 3n^2 + 2n + 5$.

Pour calculer le terme d'indice n , il suffit de chercher l'image de n par f .

On en déduit que : $u_0 = 5, u_1 = 10, u_2 = 21, \dots, u_{n+1} = 3(n+1)^2 + 2(n+1) + 5 = 3n^2 + 8n + 10$



b) PAR RECURRENCE

On donne $u_0 = 0$ et on considère la relation $u_{n+1} = 2u_n + 3$.

Ceci nous permet de calculer de **proche en proche** tous les termes de la suite (u_n) .

En effet :

$$u_1 = 2u_0 + 3 = 2 \times 0 + 3 = 3$$

$$u_2 = 2u_1 + 3 = 2 \times 3 + 3 = 9$$

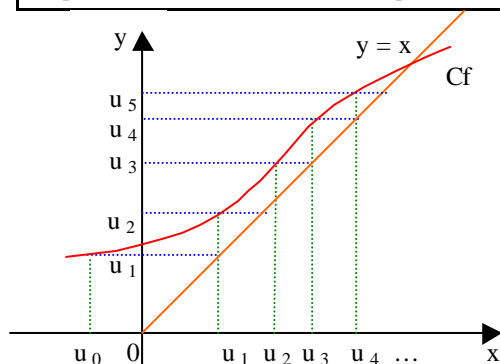
$$u_3 = 2u_2 + 3 = 2 \times 9 + 3 = 21 \dots$$

Si l'on considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 2x + 3$, alors on peut dire que la suite (u_n) est définie par la donnée de $u_0 = 0$ et par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$. (cette relation est appelée **relation de récurrence**)

De manière plus général :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I , telle que, pour tout réel $x \in I$, $f(x) \in I$. ($f(I) \subset I$)

On peut alors définir une suite (u_n) par la donnée de u_0 ($u_0 \in I$), et de **la relation de récurrence** $u_{n+1} = f(u_n)$.



En utilisant la courbe représentative de la fonction f et la droite d'équation $y = x$, on dispose alors, d'une représentation graphique de la suite (u_n) .

On peut lire les termes u_0, u_1, u_2, \dots sur l'axe des abscisses et sur l'axe des ordonnées.

Dans la plupart des cas, par manque de place ou de lisibilité, on ne peut représenter que les premiers termes de la suite.

Rem :

- La donnée de u_0 et d'une relation $u_{n+1} = f(u_n)$ ne permet pas toujours de définir une suite.
La remarque « ... $f(x)$ est aussi dans I ... » est importante .

Ex :

Soit f la fonction définie par $f : x \mapsto \frac{2}{2-x}$. Si $u_0 = 1$, alors $u_1 = f(u_0) = f(1) = 2$.

Or f n'est pas définie en 2, donc $u_2 = f(u_1)$ n'est pas défini ...

Chaque terme étant défini à partir du précédent, pour connaître le terme d'indice n , il faut d'abord calculer les $n - 1$ termes qui le précèdent ...

- Eviter la confusion entre les suites que l'on peut définir, avec la même fonction, par une formule explicite ou par récurrence.

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 3x$, alors :

« **EXPLICITE** » : $u_0 = f(0) = 0$, $u_1 = f(1) = 3$, $u_2 = f(2) = 6$...

« **RECURRENCE avec $u_0 = 1$** » : $u_0 = 1$, $u_1 = f(u_0) = 3$, $u_2 = f(u_1) = 9$...

C) SUITES CROISSANTES , SUITES DECROISSANTES

Les suites sont des fonctions particulières ... il n'est donc pas étonnant de retrouver des définitions, déjà vues pour les fonctions, ...

- Une suite (u_n) est **croissante** si, pour tout entier naturel n , $u_n \leq u_{n+1}$.
 $u_0 \leq u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \dots$
- Une suite (u_n) est **décroissante** si, pour tout entier naturel n , $u_n \geq u_{n+1}$.
 $u_0 \geq u_1 \geq u_2 \geq \dots \geq u_n \geq u_{n+1} \geq \dots$
- Une suite (u_n) est **monotone** si elle est croissante ou décroissante.

*On définit de même ces notions **strictement** .*

Rem :

- Si pour tout entier naturel n , $u_n = u_{n+1}$, on dit que la suite est **constante** .
- S'il existe un entier naturel p tel que, pour tout entier $n \geq p$, on ait $u_n \leq u_{n+1}$, on dit que la suite est croissante à partir du rang p . (de même pour les autres notions vues ci-dessus)
- Toutes les suites ne sont pas croissantes ou décroissantes ... (ex : la suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$)

Comment fait-on dans la pratique ?

- On étudie le signe de la **différence** $u_{n+1} - u_n$
- **ou** , si la suite est à termes strictement positifs (ou strictement négatifs), on compare **le quotient** $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 .

Ex :

• Soit la suite (u_n) définie par $u_n = n^2 - n - 2$.

On a $u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - (n+1) - 2 - (n^2 - n - 2) = \dots = 2n$

Pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - u_n \geq 0$, c'est à dire $u_{n+1} \geq u_n$; la suite (u_n) est donc croissante.

• Soit la suite (v_n) définie par $v_n = \frac{n}{2^n}$ ($n \geq 1$)

On a $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \frac{n+1}{2n}$; de plus $n \geq 1$, donc $n+1 \leq 2n$, et $\frac{v_{n+1}}{v_n} \leq 1$.

Or $v_n > 0$, donc $v_{n+1} \leq v_n$; la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ est donc décroissante.

et pourtant $f : x \mapsto x^2 - x - 2$ n'est pas croissante sur \mathbb{R} .

D) SUITES BORNEES

- Une suite (u_n) est **majorée** s'il existe un réel M tel que pour tout entier naturel n , on ait $u_n \leq M$.
 - Une suite (u_n) est **minorée** s'il existe un réel m tel que pour tout entier naturel n , on ait $u_n \geq m$.
 - Une suite (u_n) est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.
- Comme pour les fonctions, on dit que M (resp. m) est **un majorant** (resp. **minorant**) de la suite.

Ex :

- Une suite croissante est minorée par son terme initial ; une suite décroissante est majorée par son terme initial.

• Soit la suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n + \frac{1}{n+1}$.

Pour tout entier naturel n , on a $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ et $0 \leq \frac{1}{n+1} \leq 1$; donc $-1 \leq u_n \leq 2$. La suite (u_n) est donc bornée .

Rem :

S'il existe un entier naturel p tel que, pour tout entier $n \geq p$, on ait $u_n \leq M$, on dit que la suite est majorée à partir du rang p . (de même pour les autres notions vues ci-dessus)

E) LE COTE AGREABLE DES SUITES $u_n = f(n)$

Si une suite est de la forme $u_n = f(n)$, on déduit rapidement, à partir des propriétés de la fonction f , des résultats sur la suite. On montre facilement que :

- Si f est croissante sur $[0 ; +\infty[$, alors (u_n) est croissante.
- Si f est décroissante sur $[0 ; +\infty[$, alors (u_n) est décroissante.
- Si f est majorée sur $[0 ; +\infty[$, alors (u_n) est majorée.
- Si f est minorée sur $[0 ; +\infty[$, alors (u_n) est minorée.

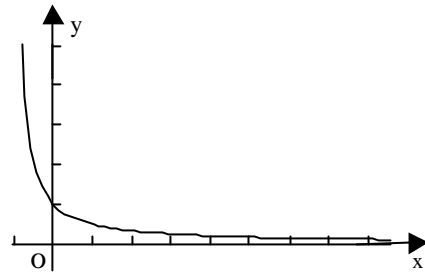
Les réciproques sont fausses

Ex :

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \frac{1}{n+1}$ et la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x+1}$

... f est strictement décroissante sur \mathbb{R}_+ et pour tout réel $x \in \mathbb{R}_+$, on a $0 \leq f(x) \leq 1$.

On en déduit que (u_n) est aussi décroissante et bornée.

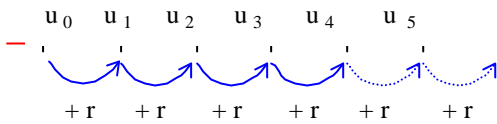


2) SUITES ARITHMETIQUES

A) DEFINITION PAR RECURRENCE

On dit qu'une suite (u_n) est une **suite arithmétique**, s'il existe un réel r tel que pour tout entier naturel n , on ait $u_{n+1} = u_n + r$.
Le réel r est appelé **raison** de la suite (u_n) .

r peut-être positif ou négatif.



On passe d'un terme de la suite au terme suivant, en ajoutant r .

Ex :

- La suite des entiers naturels est une suite arithmétique de raison 1.
- La suite des entiers naturels impairs est une suite arithmétique de raison 2.
- Soit (u_n) la suite définie par $u_n = 4n + 4$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - u_n = 4(n+1) + 4 - (4n + 4) = 4$
Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} = u_n + 4$ et (u_n) est une suite arithmétique de raison 4.

L'astuce :
calculer $u_{n+1} - u_n$

Plus généralement, on montre de la même façon, que toute suite (u_n) définie par $u_n = an + b$ (où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$) est une suite arithmétique de raison a et de premier terme b .

Et la réciproque !!!

B) DEFINITION PAR UNE FORMULE EXPLICITE

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r .
Alors, pour tout entier naturel n , on a : $u_n = u_0 + nr$

Preuve :

Additionnons membre à membre les n égalités ci-contre:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 = u_0 + r \\ u_2 = u_1 + r \\ \dots\dots\dots \\ u_{n-1} = u_{n-2} + r \\ u_n = u_{n-1} + r \end{array} \right.$$

On obtient :

$$(u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1}) + u_n = u_0 + (u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1}) + nr$$

Et après simplification :

$$u_n = u_0 + nr$$

Ex : Soit u_n la suite arithmétique définie par $u_0 = 7$ et $r = 12$, alors $u_6 = 7 + 6 \times 12 = 79 \dots$

Plus généralement :

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r .

Preuve : (Pour la preuve, on suppose que le premier terme de la suite est u_0) $u_p = u_q + (p - q)r$

On a $u_p = u_0 + pr$ et $u_q = u_0 + qr$, donc $u_p - u_q = pr - qr$ et $u_p = u_q + (p - q)r$.

Intérêts :

- Cette formule permet de calculer n'importe quel terme d'une suite arithmétique dès que l'on connaît la raison et un terme quelconque (il n'est pas nécessaire de connaître u_0)
- Cette formule permet aussi de calculer la raison d'une suite arithmétique dont on connaît deux termes.

Ex :

- Soit (u_n) une suite arithmétique telle que $u_2 = 4$ et $u_4 = 10$.
On a $u_4 = u_2 + (4 - 2)r$, donc $r = \dots = 3$.
- Soit (u_n) une suite arithmétique définie par $u_{10} = 30$ et $r = 2$.
On a $u_{20} = u_{10} + (20 - 10)2 = 50$.

C) MONOTONIE

Les résultats suivants ne sont pas surprenants :

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r .

- Si $r > 0$, alors la suite (u_n) est strictement croissante.
- Si $r < 0$, alors la suite (u_n) est strictement décroissante.
- Si $r = 0$, alors la suite (u_n) est constante.

D) SOMME DE TERMES CONSECUTIFS

Remarque préliminaire : NOMBRE DE TERMES D'UNE SOMME

$u_1 + u_2$ est une somme de deux termes ; $u_1 + u_2 + u_3$ est une somme de trois termes
De manière générale, $u_1 + u_2 + \dots + u_p$ est une somme de p termes .

Comment faire (*sans compter sur les doigts*) pour calculer le nombre de termes de la somme $u_{12} + u_{13} + \dots + u_{56}$?

On peut écrire $u_{12} + u_{13} + \dots + u_{56} = u_{1+11} + u_{2+11} + \dots + u_{45+11}$

La somme a donc 45 termes, c'est à dire $56 - 12 + 1$

Plus généralement :

Le nombre de termes de la somme $u_p + u_{p+1} + \dots + u_q$ (p, q entiers naturels tels que $p \leq q$) est **$q - p + 1$**

Etude d'un exemple fondamental : SOMME DES N PREMIERS ENTIERS NATURELS

On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n , par $u_n = n$.

Calculons la somme $S = u_1 + u_2 + \dots + u_n = 1 + 2 + \dots + n$.

On peut écrire : $S = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-2) + (n-1) + n$

$$S = n + (n-1) + (n-2) + \dots + 3 + 2 + 1$$

En additionnant membre à membre, on obtient :

$$2S = \underbrace{(n+1) + (n+1) + \dots + (n+1)}_{n \text{ fois}} \quad \text{c'est à dire } 2S = n(n+1) \quad \text{et donc } S = \frac{n(n+1)}{2}$$

Cas général :

En utilisant la même idée,

$$S = a + (a+r) + (a+2r) + \dots + b$$

$$S = b + (b-r) + (b-2r) + \dots + a$$

a et b sont les termes extrêmes de S ,
 r est la raison de la suite

On montre de façon plus générale que :

La somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique est égale au **produit du nombre de termes par la demi-somme des termes extrêmes** .

$$S = \text{nombre de termes} \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

Ex :

- Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r .

La somme $S = u_7 + u_8 + \dots + u_{15} = 9 \times \frac{u_7 + u_{15}}{2}$

- Soit (v_n) la suite arithmétique de raison 4 et de premier terme $v_0 = 15$.

On a $v_8 = v_0 + 4 \times 8 = 15 + 32 = 47$

On en déduit que $v_0 + v_1 + \dots + v_8 = 9 \times \frac{v_0 + v_8}{2} = 9 \times \frac{15 + 47}{2} = 279$

Rem: Moyenne arithmétique

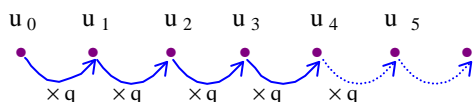
- Si a, b et c sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique alors $b = \frac{a+c}{2}$
- De manière plus générale, si $u_p, u_{p+1}, \dots, u_{p+n}$ sont $n+1$ termes consécutifs d'une suite arithmétique, alors la moyenne arithmétique de ces termes est la moyenne arithmétique des termes extrêmes : $\frac{u_p + u_{p+n}}{2}$

3) SUITES GEOMETRIQUES

A) DEFINITION PAR RECURRENCE

On dit qu'une suite (u_n) est une **suite géométrique** , s'il existe un réel q tel que pour tout entier naturel n , on ait $u_{n+1} = q u_n$.
Le réel q est appelé **raison** de la suite (u_n) .

q peut-être positif ou négatif et non nul (sans intérêt)



On passe d'un terme de la suite au terme suivant, en multipliant par q .

Ex :

- Soit (u_n) , la suite des puissances de 2 , définie par $u_n = 2^n$
Pour tout entier naturel n , on a $u_{n+1} = 2^{n+1} = 2 \times 2^n = 2 \times u_n$
Cette suite est donc une suite géométrique de raison 2 .
- Soit (v_n) la suite définie par $v_n = n \cdot 5^n$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\frac{v_{n+1}}{v_n} = 5 \times \frac{n+1}{n}$, ce qui n'est pas un rapport constant.
La suite (v_n) n'est donc pas une suite géométrique.
- Soit (w_n) la suite définie pour tout entier naturel n , par $w_n = 4 \times 3^n$
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $w_{n+1} = 4 \times 3^{n+1} = 3 \times (4 \times 3^n) = 3 \times w_n$
Cette suite est donc une suite géométrique de raison 3.

L'astuce :

calculer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$

Plus généralement, on montre de la même façon, que toute suite (u_n) définie par $u_n = a q^n$ (où $a \in \mathbb{R}^*$ et $q \in \mathbb{R}^*$) est une suite géométrique de raison q et de premier terme a .

Et la réciproque !!!

B) DEFINITION PAR UNE FORMULE EXPLICITE

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q .
Alors, pour tout entier naturel n , on a : $u_n = u_0 \times q^n$

Preuve :

(u_n) est une suite géométrique, donc $u_1 = u_0 q$. Puis $u_2 = u_1 q = (u_0 q) q = u_0 q^2$
Et ainsi de proche en proche, car lorsqu'on aura établi que pour l'entier naturel p , $u_p = u_0 q^p$, on en déduira que $u_{p+1} = u_0 q^{p+1}$.
En effet $u_{p+1} = u_p q = u_0 q^p q = u_0 q^{p+1}$.

Ex : Soit u_n la suite géométrique définie par $u_0 = 7$ et $r = 12$, alors $u_3 = 7 \times 12^3 = 12096$

Plus généralement :

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q . Quels que soient les entiers naturels m et n , on a $u_m = u_n \times q^{m-n}$

Preuve : (Pour la preuve, on suppose que le premier terme de la suite est u_0)

On a $u_m = u_0 \times q^m$ et $u_n = u_0 \times q^n$
 $q \neq 0$, donc $\frac{u_m}{u_n} = \frac{q^m}{q^n} = q^{m-n}$ et $u_m = u_n \times q^{m-n}$

Intérêt : Cette formule permet de calculer n'importe quel terme d'une suite géométrique dès que l'on connaît la raison et un terme quelconque (il n'est pas nécessaire de connaître u_0)

Ex :

- Soit (u_n) une suite géométrique définie par $u_{10} = 30$ et $q = 2$.
On a $u_{13} = u_{10} \times 2^{13-10} = 30 \times 2^3 = 30 \times 8 = 240$
- Soit (v_n) une suite géométrique telle que $v_2 = 5$ et $v_8 = 320$.
On a $v_8 = v_2 \times q^{8-2}$, donc $320 = 5 \times q^6$ c'est à dire $q^6 = 64$
Il y a donc deux valeurs possibles $q = 2$ ou $q = -2$

Attention : Cette formule ne permet pas de calculer la r: d'une suite géométrique dont on connaît deux termes.

Rem: Moyenne géométrique

Si a , b et c sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique alors $b^2 = a c$.

Si trois nombres positifs a , b et c vérifient $b^2 = a c$, on dit que b est la moyenne géométrique de a et c .

C) MONOTONIE

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q (strictement positive) et de terme initial u_0 .

- Si $0 < q < 1$ et $u_0 < 0$, alors la suite (u_n) est strictement croissante.
Si $0 < q < 1$ et $u_0 > 0$, alors la suite (u_n) est strictement décroissante.
- Si $q > 1$ et $u_0 < 0$, alors la suite (u_n) est strictement décroissante.
Si $q > 1$ et $u_0 > 0$, alors la suite (u_n) est strictement croissante.
- Si $q = 1$, alors la suite (u_n) est constante.

Si $q < 0$ la suite est alternativement positive puis négative ...

Idée de preuve :

Soit $n \in \mathbb{N}$.
On a $u_n = u_0 \times q^n$ et $u_{n+1} = u_0 \times q^{n+1}$
Ainsi $u_{n+1} - u_n = u_0 \times q^{n+1} - u_0 \times q^n = u_0 \times (q^{n+1} - q^n) = q^n \times u_0 \times (q - 1)$
 $q > 0$; on en déduit que le signe de $u_{n+1} - u_n$ est le signe de $u_0 \times (q - 1)$...

D) SOMME DE TERMES CONSECUTIFS

Étude d'un exemple fondamental : SUITE GEOMETRIQUE DE PREMIER TERME $u_0 = 1$.

On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n , par $u_n = q^n$ ($q \neq 0$ et $q \neq 1$)

Calculons la somme $S = u_1 + u_2 + \dots + u_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$.

On peut écrire : $S = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} + q^n$
 $qS = q + q^2 + q^3 + \dots + q^n + q^{n+1}$

Par soustraction membre à membre, on obtient :

$S - qS = 1 - q^{n+1}$ c'est à dire $(1 - q)S = 1 - q^{n+1}$ et donc $S = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

Cas général :

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q ($q \neq 0$, $q \neq 1$).
Calculons la somme $S = u_4 + u_5 + \dots + u_8$
On a $S = u_4 + q u_4 + q^2 u_4 + q^3 u_4 + q^4 u_4 = u_4 (1 + q + q^2 + q^3 + q^4)$
Ainsi $S = u_4 \times \frac{1 - q^5}{1 - q}$

Pour calculer la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q , on applique la formule suivante :

$$S = \text{premier terme} \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}$$

Ex : Soit (v_n) la suite géométrique définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = 2^n$

On a $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n = 1 \times \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2}$. On en déduit que $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$