Matière : Mathématiques
Niveau : 3APIC
Durée : 12 h

Ordres et opérations

Professeur :
Etablissement :
Année Scolaire :

COMPÉTENCES EXIGIBLES

- Connaitre les propriétés de l'ordre et opérations
- Utiliser ces propriétés pour résolue des différents problèmes mathématiques
- Savoir les différentes techniques de comparaison et l'utiliser selon chaque situation

ORIENTATIONS PEDAGOGIQUES

L'utilisation de l'ordre et la comparaison lors de la comparez des nombres c'est une techniques qui déjà pratiquées par les élèves.

- Le fait que « comparer deux nombres est équivalent à chercher le signe de leur différence »

- accepter tous les propriétés de l'ordres et opérations pour encadrer la somme ou bien la différence de deux nombres réels ,même chose pour la multiplication et le quotient de deux nombres réels

EXTENSIONS

- Les inéquations
- Les fonctions numériques

PRE-REQUIS

Opérations sur les nombres rationnels

- Comparaison des nombres rationnels
- Calcule des valeurs approchées
- Les racines carrées

Objectif	Activités	Contenu de cours	Applications

Objectif

Comparer deux nombres réels

Activités

Activité 1 :

1- Compléter le tableau ci-dessous :

a	b	Comparer a et b	a - b	Signe de a - b
7	-10			
$\frac{7}{5}$	$\frac{8}{3}$			
$\frac{\sqrt{8}}{7}$	$\frac{3}{\sqrt{2}}$			
$\sqrt{5}$	$\sqrt{5}$			

2- Que remarque-t-on ?

Contenu de cours

I- Comparaison de deux nombres réels :

1- Notation et définition

Symboles	Signification
$a<b$	*a est strictement inférieur à b*
$a>b$	*a est strictement supérieur à b*
$a\geqslant b$	*a est supérieur ou égal à b*
$a\leqslant b$	*a est inférieur ou égal à b*

2- Propriété :

On peut connaître l'ordre de deux nombres réels a et b en déterminant le signe de leur différence a – b

- Si a – b est positif, alors a > b .
- Si a - b est négatif, alors a < b .
- Si a-b=0 alors a=b

Exemple :

$Comparons \frac{3}{5}$ et $\frac{1}{2}$ $: on\ a$

$$\frac{3}{5}-\frac{1}{2}=\frac{6-5}{10}=\frac{1}{10}>0\ \ donc\ \frac{3}{5}>\frac{1}{2}$$

Applications

Application :

Comparer les nombres suivants :

$\frac{15}{14}\ et\ \frac{12}{7}$

$\sqrt{3}+5\ et\ 2\sqrt{3}-4$

$-3\sqrt{2}-1\ et\ 7+\sqrt{2}$

Ajouter ou soustraire un nombres réel aux deux membres d'une égalité	**Activité 2 :** a , b et m sont des nombres réels tel que a> b . 1) calculer la différence de a + m et b + m. déduis-en la comparaison de a + m et b + m. 2) compare a – m et b – m en procédant de la même façon. 3) Enonce les règles que tu viens de démontrer .	**II- Ordre et opérations :** 1- ordre et l'addition –ordre et soustraction : **Propriété 1 :** a, b et c désignent trois nombres réels En ajoutant (ou en retranchant) un même nombre réel aux deux membres d'une inégalité, on obtient une inégalité de même sens. si $a\leqslant b$ alors $a+c\leqslant b+c$ si $a\leqslant b$ alors $a-c\leqslant b-c$ Exemple 1 : *1-Comparons* $3+\sqrt{5}$ *et* $1+\sqrt{5}$ *On a* $1\leq 3$ *alors* $1+\sqrt{5} \leq 3+\sqrt{5}$ *2-a et b deux nombres réels tel que :* $a\leq b$ *Comparons* $a-2\sqrt{3}$ *et* $b-2\sqrt{3}$	**Application :** A et b deux nombres réels tel que : $a\geq -12$ *et* $b\leq 5$ Démontrer que : $b-7\leq -2$ $a+\frac{1}{2}\geq \frac{-23}{2}$ $b+\frac{3}{4}\leq \frac{23}{4}$ $a-b\geq -17$ $b-a\leq 17$

Propriété 2:

a, b et c désignent trois nombres réels

En ajoutant membre à membre deux inégalités de même sens, on obtient une inégalité de même sens.

Si $a \leqslant b$

$c \leqslant d$

Alors $a+c \leqslant b+d$

Exemple :
On prend $a \leq 5 \; et \; 3 \geq b$
Démontrer que $a + b \leq 8$

Multiplier par un nombre réel les deux membres d'une égalité	Activité 3 : A et b deux nombres réels Soit k un nombre réel non nul, 1- Factoriser k×a et k×b 2- Si k un nombre strictement positif, comparer k×a - k×b 3- Si k un nombre strictement négatif, comparer k×a - k×b	**2- L'Ordre et multiplication :** a. Multiplication par un nombre strictement positif **Propriété1 :** Lorsqu'on multiplie (ou divise) les deux membres d'une inégalité par un nombre réel **strictement positif**, on obtient une **inégalité de même sens**. Si $a\leqslant b$ $x>0$ Alors $ax\leqslant bx$ Si $a\leqslant b$ $x>0$ alors $\frac{a}{x}\leqslant\frac{b}{x}$ Exemple : $-4\leqslant-2$ et $0<2$ Donc $(-4)\times2\leqslant(-2)\times2$ $-8\leqslant-4$	Application : a et b eux nombres reéls tel que : $a \geq -3 \; et \; \frac{1}{2} \leq b$ Démontrer que : $2b \geq 1$ $-3a \leq 9$ $2a - 6b \geq -3$

		b. Multiplication par un nombre strictement négatif **Propriété2 :** Lorsqu'on multiplie (ou divise) les deux membres d'une inégalité par un nombre réel **strictement négatif**, on obtient une inégalité **sens contraire**. Si $\{a \geqslant b$ Et $x<0$ Alors $ax \leqslant bx$ Si $a \leqslant b$ et $x<0$ alors $xa \geqslant xb$ Exemple : $1 \leqslant 5$ $-2<0$ donc $1 \times (-2) \geqslant 5 \times (-2)$ $-2 \geqslant -10$	

		c. Multiplication membre à membre **Propriéte3 :** En multipliant membre à membre deux inégalités de même sens et ne portant que sur des réels positifs ou nuls, on obtient une inégalité de même sens. Si $\begin{cases} 0\leqslant a\leqslant b \\ 0\leqslant c\leqslant d \end{cases}$ Alors $0\leqslant ac\leqslant bd$ Exemple : $2\leqslant a\leqslant 3$ $\times 1\leqslant b\leqslant 5$ $= 2\times 1\leqslant a\times b\leqslant 3\times 5$ Donc $2\leqslant ab\leqslant 15$	

ranger les inverses de deux réels

Activité 4 :

1- Compléter le tableau ci-dessous :

a	b	$a \leq b$ ou $a \geq b$	$\frac{1}{a}$	$\frac{1}{b}$	$\frac{1}{a} \leq \frac{1}{b}$ ou $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$
-3	-4				
$\frac{-7}{3}$	$\frac{-3}{4}$				
$5\sqrt{2}$	$2\sqrt{5}$				

2- Enoncer la propriété que tu viens de démonter

3- Rangement des inverses

a) Cas des réels strictement positifs

Deux réels strictement positifs sont rangés dans l'ordre contraire de leurs inverses.

Si $0<a\leqslant b$

alors $\frac{1}{a}\geqslant\frac{1}{b}$

1) $\boldsymbol{ona\ 2 \leq 4\ \ alors\ \ \frac{1}{2} \geq \frac{1}{4}}$

2) $ona\ \frac{1}{5\sqrt{2}} \geq \frac{1}{2\sqrt{5}}\ \ alors\ \ 5\sqrt{2} \leq 2\sqrt{5}$

b) Cas des réels strictement négatifs

Deux réels strictement négatifs sont rangés dans l'ordre contraire de leurs inverses.

Si $a\leqslant b<0$ alors $\frac{1}{a}\geqslant\frac{1}{b}$

Exemple : $\boldsymbol{ona -6 \leq -4\ \ alors\ \ -\frac{1}{6} \geq -\frac{1}{4}}$

Application :

1-a et b eux nombres réels tel que :

$b \geq \sqrt{3}\ \ et\ a \geq \frac{4}{3}$

Démontrer que :

$$\frac{1}{b} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{3}{4} \geq a$$

$$\frac{a}{b} \leq \frac{3}{4\sqrt{3}}$$

$$b^2 \geq 3$$

$$\sqrt{a} \geq \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Ranger les carrés de deux réels	Activité 5 : **A**–a et b deux nombres réels positifs 1) $démontrer\ que\ le\ signe\ de\ a^2-b^2\ est\ le\ meme\ signe\ de\ a-b$ 2) $démontere\ que\ si\ a\leq b\ donc\ a^2\leq b^2$ **B**– a et b sont deux réels négatifs 1) $démontrer\ que\ le\ signe\ de\ a^2-b^2\ est\ le\ signe\ contraire\ de\ a-b$ 2) $démontere\ que\ si\ a\leq b$ $donc\ a^2\geq b^2$	4) Rangement des carrés (a) Cas des réels positifs Deux réels positifs sont rangés dans le même ordre que leurs carrés. Si 0⩽a⩽b alors $a^2\leqslant b^2$ (b)Cas des réels négatifs Deux réels négatifs sont rangés dans l'ordre contraire de leurs carrés. Si a⩽b⩽0 alors $a^2\geqslant b^2$ Exemple 1) comparons $2\sqrt{5}$et $3\sqrt{2}$ 2) comparons $2\sqrt{2}$et -3	2-calculer a et b dans chaque cas : 1) $a=2\sqrt{7} et\ b=7$ 2) $a=7\sqrt{5} et\ b=\sqrt{7}$ 3) $a=-\sqrt{7} et\ b=-\sqrt{5}$ 4) $a=5+2\sqrt{3} et\ b=\sqrt{5+2\sqrt{3}}$

Ranger les racines carrées de deux réels		5) Rangement des racines carrées ➢ Cas des réels positifs et de leurs racines carrés Deux réels positifs sont rangés dans le même ordre que leurs racines carrés. Si $0 \leqslant a \leqslant b$ alors $\sqrt{a} \leqslant \sqrt{b}$	

Additionne r et Soustraire Les bornes Des Encadreme nts de deux réels	**Activité 6 :** Soient a , b , x , y , z et t des nombres réels tels que : $x \leq a \leq y$ et $z \leq b \leq t$ $1-$ Montrer que : $a+b \leq y+t$ Et $x+z \leq a+b$ $2-$ En déduire un encadrement de : $a+b$ 1- Démontrer que $-t \leq -b$ $et -b \leq -z$ 4-déduire un encadrement de –b 5-déduire l'encadrement de a-b (remarquer que a-b=a+(-b))	**II. Encadrement :** **Définition :** Deux nombres rérls a et b encadrent le nombre rationnel x lorsque $a \leq x \leq b$ ou $a < x < b$ **1- Encadrements et additions :** considérons deux réels x et y tels que $a < x < b$ et $c < y < d$. La somme $x+y$ est alors encadrée par $a+c$ et $b+d$. On a $a+c < x+y < b+d$. Il suffit d'additionner les bornes des encadrements de x et y pour obtenir un encadrement de $x+y$. **Exemple :** $x\ et\ y\ deux\ réels\ tel\ que\ \ 2 \leq x \leq 5\ \ et$ $-3 \leq y \leq -1\ \ encadrer\ \ x+y$	**Application :** x et y deux nombres réels tel que : $\frac{2}{5} \leq x \leq 1$ $-\sqrt{5} \leq y \leq \frac{3}{2}$ Encadrer : $x - \frac{6}{11}$ $y + \frac{3}{5}$ $x + y$ $x - y$ $2x - 3y$ $3x - 5y$

2- Encadrements et soustractions :

Pour encadrer le résultat d'une soustraction, on commence par la remplacer par une addition (soustraire c'est ajouter l'opposé) pour pouvoir appliquer la propriété précédente

considérons x , y, a, b, c *et* d *des nombres réels* tels que

si $a < x < b$ et $c < y < d$.

$a+(-d) < x+(-y) < b+(-c)$

$a-d < x-y < b-c$

Exemple :

1) x *et* y *deux réels tel que* $2 \leq x \leq 5$ *et* $1 \leq y \leq 6$ *encadrer* $x - y$

2) a *et* b *deux réels tel que* $1 \leq a \leq 3$ *et* $-7 \leq b \leq -2$ *encadrer* $a - b$

Multiplier les bornes ses encadrements de deux nombres réels	**Activité 7 :** Soient a , b , x , y , z et t des nombres réels tels que : $(a > 0 \quad et \quad b > 0)$ $x \leq a \leq y$ et $z \leq b \leq t$ 1 – Montrer que : $a \times b \leq y \times t$ Et $x \times z \leq a \times b$ 2 – En déduire l'encadrement de : $a \times b$ 3-on considéré que b<0 Montrer que $a \times b \leq y \times z \quad et \quad x \times t \leq a \times b$	**3- Encadrement et multiplications :** **Prpriéte1 :** Considérons deux nombres réels **positifs** x et y tels que $0 < a < x < b$ et $0 < c < y < d$. Le produit xy est alors encadré par ac et bd. On a $ac < xy < bd$. Il suffit de multiplier les bornes des encadrements de x et y pour obtenir un encadrement de xy. **Exemple :** x et y deux réels tel que $2 \leq x \leq 5$ et $1 \leq y \leq 3$ encadrer $x \times y$ **Propriété 2 :** Considérons a et b deux nombres réels positifs et c et d deux réels négatifs tel que $0 < a < x < b$ et $c < y < d < 0$ Alors $bc < xy < ad$. **Exemple :** x et y deux réels tel que $3 \leq x \leq 7$ et $-3 \leq y \leq -1$ encadrer $x \times y$	**Application :** x et y deux nombres réels tel que : $2 \leq x \leq 3$ $-2 \leq y \leq -1$ $3 \leq z \leq 6$ Encadrer : xz yx yz $\frac{x}{z}$ x^2 et y^2 $\frac{x+z}{y}$

Encadrer un inverse Encadrer un quotient	On considère que $a \neq 0$ et $x \neq 0 et\ y \neq 0$ 4-montrer que $\frac{1}{a} \leq \frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y} \leq \frac{1}{a}$ 5-déduire l'encadrement de $\frac{1}{a}$ On considère que $b \neq 0$ et $t \neq 0 et\ z \neq 0$ 6- donner l' encadrement de $\frac{1}{b}$ 7-déduire l'encadrement de $\frac{a}{b}$	**4-** Encadrer un inverse : a et b sont deux réels strictement positifs $\boldsymbol{si\ \ 0 < a \leq x \leq b\ \ alors: \frac{1}{b} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{a}}$ Exemple : $\boldsymbol{si\ \ 2 \leq x \leq 4\ \ alors: \frac{1}{4} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{2}}$ 5) Encadrer un quotient : Considérant tous les nombres réels positifs $si\ \ a \leq x \leq b\ \ et\ \ c \leq y \leq d$ $alors: \frac{a}{d} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{b}{c}\ tel\ que\ d \neq 0\ et\ y \neq 0\ et\ c \neq 0$ Exemple : $x\ et\ y\ deux\ nombres\ réels\ tel\ que$ $6 \leq x \leq 10 \quad 3 \leq y \leq 4\ \ encadrer\ \frac{x}{y}$	
