# Chapitre 9 – Calcul littéral – Identités Remarquables

## 1- Propriétés

### a) Distributivité simple

Pour tout nombre $a$, $b$, $k$ : $\boxed{k(a+b) = ka + kb}$

### b) Distributivité double

Pour tout nombre $a$, $b$, $c$, $d$ : $\boxed{(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd}$

### c) Identités Remarquables

* Carré d'une somme

Pour tout nombre $a$, $b$ : $\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$

Autrement dit : le carré de la somme de deux nombres égale la somme de leurs carrés augmentée du double produit de ces deux nombres.

Démonstration

$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$ **CQFD !**

* Carré d'une différence

Pour tout nombre $a$, $b$ : $\boxed{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$

Autrement dit : le carré de la différence de deux nombres égale la somme de leurs carrés diminuée du double produit de ces deux nombres.

Démonstration

$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$ **CQFD !**

* Produit des expressions « conjuguées »

Pour tout nombre $a$, $b$ : $\boxed{(a+b)(a-b) = a^2 - b^2}$

Autrement dit : le produit de la somme de deux nombres et de leur différence égale la différence de leurs carrés.

Démonstration

$(a+b)(a-b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2$ **CQFD !**

## 2- Factorisation d'une expression

Factoriser une expression, c'est l'écrire sous la forme d'un produit.

### a) On connaît un facteur commun

Dans ce cas, on utilise la propriété : $\boxed{k\,a + k\,b = k\,(\,a + b\,).}$

Exemples

* $A(x) = 4x - 8$

$A(x) = \mathbf{4}\,x - \mathbf{4} \times 2$

$\underline{\mathbf{A(x) = 4\,(\,x - 2\,)}}$

* $B(x) = 3x - 3$

$B(x) = \mathbf{3}\,x - \mathbf{3} \times 1$

$\underline{\mathbf{B(x) = 3\,(\,x - 1\,)}}$

* $C(x) = (\,5x - 4\,)^2 - (\,3x + 2\,)(\,5x - 4\,)$

$C(x) = \mathbf{(\,5x - 4\,)}(\,5x - 4\,) - (\,3x + 2\,)\mathbf{(\,5x - 4\,)}$

$C(x) = (\,5x - 4\,)\big(\,(\,5x - 4\,) - (\,3x + 2\,)\,\big)$

$C(x) = (\,5x - 4\,)\,(\,5x - 4 - 3x - 2\,)$

$\underline{\mathbf{C(x) = (\,5x - 4\,)\,(\,2x - 6\,)}}$

### b) On reconnaît une identité remarquable

On utilise alors une des propriétés :

$$\boxed{\begin{aligned} a^2 + 2\,a\,b + b^2 &= (\,a + b\,)^2 \\ a^2 - 2\,a\,b + b^2 &= (\,a - b\,)^2 \\ a^2 - b^2 &= (\,a + b\,)\,(\,a - b\,) \end{aligned}}$$

Exemples

* $A(x) = 25x^2 + 40x + 16$

$A(x) = (5x)^2 + 2\,(5x)\,(4) + (4)^2$

$\underline{\mathbf{A(x) = (\,5x + 4\,)^2}}$

* $B(x) = 9x^2 - 4$

$B(x) = (3x)^2 - 2^2$

$\underline{\mathbf{B(x) = (\,3x + 2\,)(\,3x - 2\,)}}$

* $C(x) = (\,3x + 6\,)^2 - 81$

$C(x) = (\,3x + 6\,)^2 - 9^2$

$C(x) = (\,3x + 6 + 9\,)(\,3x + 6 - 9\,)$

$\underline{\mathbf{C(x) = (\,3x + 15\,)(\,3x - 3\,)}}$

## 3- Équations « produit nul »

L'objectif de ce paragraphe est de résoudre certaines équations à une inconnue du second degré.

### a) Vocabulaire

Soit deux expressions $A(x)$ et $B(x)$ de la variable $x$.

Toute équation de la forme $A(x) \times B(x) = 0$ est appelée **équation « produit nul »**.

### b) Propriété

Pour qu'un produit soit nul, il faut et il suffit qu'un de ses facteurs soit nul.

Autrement dit

Soit $a$ et $b$ deux nombres.

* Si $a = 0$ ou $b = 0$, alors $a \times b = 0$.

* Réciproquement, si $a \times b = 0$ alors $a = 0$ ou $b = 0$.

Démonstration

* La première partie de la propriété est évidente.

* Si $a \times b = 0$, on envisage deux cas.

Premier cas : supposons que $a$ est nul. La propriété est alors démontrée.

Second cas : supposons que $a$ est non nul. On peut alors multiplier chacun des membres de l'égalité par l'inverse de $a$ : $\dfrac{a \times b}{a} = \dfrac{0}{a}$. En simplifiant, on obtient : $b = 0$. **CQFD !**

### c) Principe et méthode générale

On considère une équation du second degré.

* Si ce n'est pas le cas, on transpose pour que le second membre de cette équation soit nul.

* On factorise alors, si possible, le premier membre : on obtient ainsi une équation « produit nul ».

* On utilise la précédente propriété : on doit alors résoudre deux équations du premier degré.

### d) Application

Résoudre l'équation : $(3x - 5)(2x + 4) = 0$. **On reconnaît ici une équation « produit nul ».**

Or, si un produit est nul, alors un au moins de ses facteurs est nul (et réciproquement).

Donc : $3x - 5 = 0$ ou $2x + 4 = 0$

Soit : $x = \dfrac{5}{3}$ ou $x = -2$

Par conséquent, l'équation admet deux solutions : $-2$ et $\dfrac{5}{3}$.