

Chapitre 5

Calcul littéral et identités remarquables

Objectifs :

- ▶ Développer et factoriser (cas où le facteur est apparent) une expression littérale.
- ▶ Connaître les identités remarquables et les utiliser sur des exemples numériques (socle) ou littéraux.
- ▶ Établir une formule ; faire une démonstration à l'aide du calcul littéral.

I. Développement

Définition :

Développer un produit, c'est l'écrire sous la forme d'une somme (ou d'une différence).

Formules de distributivité :

Quels que soient les nombres a , b , c , d et k :

$$k(a + b) = ka + kb \quad k(a - b) = ka - kb \quad (\text{distributivité de la multiplication sur l'addition et la soustraction})$$

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd \quad (\text{double distributivité})$$

Exemple :

Développer l'expression $A = (x + 4)(-2x + 3) - 5(x - 3)$

$$A = x \times (-2x) + x \times 3 + 4 \times (-2x) + 4 \times 3 - 5 \times x - 5 \times (-3) \quad (*)$$

$$A = -2x^2 + 3x - 8x + 12 - 5x + 15$$

$$A = -2x^2 + 3x - 8x - 5x + 12 + 15 \quad (*)$$

$$A = -2x^2 - 10x + 27$$

les étapes (*) ne sont pas obligatoires

Identités remarquables :

Quels que soient les nombres a et b :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Remarque :

Le terme $2ab$ est appelé le **double produit**, c'est le double du produit de a et b .

Exemples :

$$(x + 2)^2 = x^2 + 2 \times x \times 2 + 2^2 = x^2 + 4x + 4 \quad (\text{première identité remarquable avec } a = x \text{ et } b = 2)$$

$$(2x - 3)^2 = (2x)^2 - 2 \times 2x \times 3 + 3^2 = 4x^2 - 12x + 9 \quad (\text{deuxième identité remarquable avec } a = 2x \text{ et } b = 3)$$

$$(x + 5)(x - 5) = x^2 - 5^2 = x^2 - 25 \quad (\text{troisième identité remarquable avec } a = x \text{ et } b = 5)$$

II. Factorisation

Définition :

Factoriser une somme, c'est l'écrire sous la forme d'un produit.

Formules de distributivité :

Quels que soient les nombres a , b et k :

$$ka + kb = k(a + b) \quad ka - kb = k(a - b)$$

On dit que k est un **facteur commun** des termes ka et kb .

Exemple :

Pour pouvoir factoriser à l'aide des formules de distributivité, il faut repérer un facteur commun.

$$\text{Factoriser } A = (x + 2)(2x - 1) - (x + 2)x$$

$(x + 2)$ est un facteur commun. En effet, $A = (x + 2) \times (2x - 1) - (x + 2) \times x$

d'où $A = (x + 2) [(2x - 1) - x]$ (dans la formule de distributivité, $k = x + 2$; $a = 2x - 1$ et $b = x$)

$$A = (x + 2)(2x - 1 - x)$$

$$A = (x + 2)(x - 1)$$

Identités remarquables :

Quels que soient les nombres a et b :

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

Exemples :

$$x^2 + 10x + 25 = x^2 + 2 \times x \times 5 + 5^2 = (x + 5)^2 \text{ (on reconnaît la première identité remarquable avec } a = x \text{ et } b = 5)$$

$$36x^2 - 48x + 16 = (6x)^2 - 2 \times 6x \times 4 + 4^2 = (6x - 4)^2 \text{ (deuxième identité remarquable avec } a = 6x \text{ et } b = 4)$$

$$(2x - 1)^2 - 9 = (2x - 1)^2 - 3^2 = (2x - 1 + 3)(2x - 1 - 3) = (2x + 2)(2x - 4)$$

(troisième identité remarquable avec $a = 2x - 1$ et $b = 3$)