EXERCICES PRIMITIVES ET CALCUL INTÉGRAL

Site MathsTICE de Adama Traoré Lycée Technique Bamako

EXERCICE 01 :

Trouver une primitive de chacune des fonctions f définies par

1°) $f(x) = -x^3 + 6x^2 + 10x - 4$; 2°) $f(x) = 2x^5 - 5x^3 + 5x$

3°) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 9x + 1$; 4°) $f(x) = -3x^4 + 2x^3 - 5x + 7$

5°) $f(x) = (2x-1)(x^2 - x + 4)^3$; 6°) $f(x) = (6x+3)(x^2 + x + 1)^4$

7°) $f(x) = 5x\,(x^2+1)^6$; 8°) $f(x) = 3x^2\,(x^3+1)^5$

9°) $f(x) = 7x^2\,(x^3+5)^3$; 10°) $f(x) = x\,(x^2-4)^2$

11°) $f(x) = (5x+1)^7$; 12°) $f(x) = (-3x+2)^4$

13°) $f(x) = (x-4)^3$; 14°) $f(x) = (5-2x)^6$

15°) $f(x) = \dfrac{2x+1}{(x^2+x-3)^3}$; 16°) $f(x) = \dfrac{3}{(5x-1)^2}$

17°) $f(x) = \dfrac{2x}{(x^2+1)^4}$; 18°) $f(x) = \dfrac{-x}{(x^2-9)^5}$

19°) $f(x) = \dfrac{x}{(x^2+2)^3}$; 20°) $f(x) = 5 + x + \dfrac{4}{(x+1)^2}$

21°) $f(x) = \dfrac{3x}{(x^2+2)^3}$; 22°) $f(x) = -x^2 + \dfrac{4}{x^2} + \dfrac{5}{x^3} + \dfrac{2}{(x+3)^2}$

23°) $f(x) = \dfrac{2x^5 - x^3 + 3x^2 + 2}{x^2}$; 24°) $f(x) = \dfrac{x^3 + 5x^2 - 1}{3x^2}$

25°) $f(x) = \dfrac{2x^3 + 5x^2 + 4x + 4}{(x+1)^2}$; 26°) $f(x) = (x^3 - 7x + 1)^5(3x^2 - 7)$

27°) $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sin^3 x}$; 28°) $f(x) = \sin x \cos^4 x$

29°) $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos^4 x}$; 30°) $f(x) = \cos x \sin^4 x$

31°) $f(x) = \sin 3x$; 32°) $f(x) = \sin(4x + \dfrac{\pi}{3})$

33°) $f(x) = 4\cos 2x$; 34°) $f(x) = \cos(6x+2)$

34°) $f(x) = \cos 3x + 6\sin 3x - \sin x \cos^3 x$; 35°) $f(x) = \cos^5 x$

36°) $f(x) = 10\sin 5x + 12\cos 4x - 3\sin(6x - \dfrac{\pi}{6})$; 37°) $f(x) = \sin^4 x$

EXERCICE 02:

1- Calculer les intégrales suivantes

$A=\int_{-3}^{2}(x^4-5x^2+3)dx$; $B=\int_{0}^{1}(x+3)(x^2+6x+4)^2dx$; $K=\int_{0}^{1}(x+1)^n dx$; $L=\int_{0}^{1}(3x+1)^5dx$

$C=\int_{1}^{2}\frac{4x^3-3x^2+1}{5x^2}dx$; $D=\int_{0}^{2}(2x+1)^3dx$; $E=\int_{1}^{2}\frac{3x+6}{(x^2+4x+3)^4}dx$; $T=\int_{0}^{1}\frac{x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}dx$

$F=\int_{0}^{1}\frac{3}{(3-2x)^4}dx$; $G=\int_{2}^{3}(3x^2-\frac{4}{x^2}+\sqrt{x})dx$; $J=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{\sin^2 x}dx$; $K=\int_{1}^{e}\frac{\ln^3 x}{x}dx$; $H=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\tan(x)dx$

$L=\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\sin x\cos^3 x\,dx$; $N=\int_{0}^{1}x(x^2+1)^5dx$; $P=\int_{-2}^{1}\sqrt{x+3}\,dx$; $D=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\tan^2(x)dx$

$Q=\int_{1}^{e}\frac{1+\ln x}{x}dx$; $R=\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}cox(2x+\frac{\pi}{3})dx$; $U=\int_{0}^{1}(x+e^x)dx$; $K=\int_{-1}^{0}(x^2+x)e^{2x}dx$

$V=\int_{0}^{1}\frac{3x}{x^2+4}dx$; $W=\int_{1}^{2}\frac{10x+1}{\sqrt{5x^2+x+3}}dx$; $X=\int_{0}^{\pi}\cos x(1-3\sin^2 x)dx$; $W=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan(x)}{\cos(x)}dx$

$I=\int_{1}^{2}(\sqrt{3x-2})dx$; $J=\int_{1}^{2}x(x^2-3)dx$; $L=\int_{2}^{6}\frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}dx$; $L=\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2-x^4}\,dx$;

$A=\int_{3}^{5}\left(2x-1+\frac{1}{(x-1)^2}\right)dx$; $B=\int_{0}^{1}(\frac{x}{\sqrt{x+1}})dx$; $E=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\cos^5 x\,dx$; $K=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^4 x\,dx$;

$M=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\cos^2 x\sin^3 x\,dx$; $N=\int_{0}^{3}\frac{dx}{\sqrt{x+1}}$; $P=\int_{0}^{1}\frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+1}}dx$; $Q(x)=\int_{0}^{1}\frac{x}{(2x^2+3)^3}dx$;

$S=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x(\cos x+1)^2dx$; $T=\int_{0}^{3}\left|x^2-3x+2\right|dx$; $P=\int_{-3}^{4}\left|x^2-2x-3\right|dx$; $K=\int_{-1}^{4}(\left|x^2-2x\right|+3)dx$

$D=\int_{-4}^{1}(\left|x+3\right|+\left|2x-1\right|)dx$; $T=\int_{-5}^{7}(\left|x+3\right|+2\left|x^2-3x+2\right|)dx$; $G=\int_{0}^{5}(\left|2x-5\right|+\left|x-3\right|)dx$;

$U=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sin 3t\cos 4t\,dt$; $Y=\int_{-1}^{3}(x\left|x^2-x-2\right|)\,dx$; $Z=\int_{1}^{2}\left(\frac{e^x}{x}+e^x\ln x\right)dx$.

EXERCICE 03:

En utilisant la formule d'intégration par parties calculer les intégrales

$K=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\,dx$; $J=\int_{0}^{1}x^2e^xdx$; $M=\int_{0}^{1}(-2x^2+x+1)e^xdx$; $I=\int_{1}^{2}x\sqrt{2x+1}\,dx$

$P=\int_{0}^{1}(x+1)\sqrt{2x+1}\,dx$; $T=\int_{1}^{x}\ln t\,dt$; $S=\int_{e}^{2e}x\ln x^2dx$; $P=\int_{1}^{2}x\ln x\,dx$;

$C=\int_{0}^{1}x^2\sqrt{1-x}\,dx$; $H=\int_{1}^{e}\frac{\ln x}{x}dx$; $F=\int_{1}^{e}(t^2+3)\ln t\,dt$; $I=\int_{0}^{\pi}e^x\cos x\,dx$;

$H=\int_{0}^{1}t^2e^tdt$; $J=\int_{0}^{\pi}(3t^2-t+1)\sin t\,dt$; $R=\int_{1}^{2}\frac{\cos(\ln x)}{x}dx$; $V=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}x\sin^2(3x)\,dx$

$K=\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}x^2\cos(2x)dx$; $J=\int_{0}^{1}(x+2)e^xdx$; $K=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}x\sin^3 x\,dx$.

EXERCICE 04:

Soient la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{2x^3+5x^2-4x-7}{(x+2)^2}$

1°) Trouver les réels a ; b et c tels que $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{(x+2)^2}$

2°) Trouver la primitive F de f prenant la valeur $-\dfrac{5}{2}$ en 0.

3°) En déduire $I=\int_2^3 f(x)\,dx$.

EXERCICE 05:

Soit Soient la fonction *f* définie par $f(x)=\dfrac{3x^2+6x+4}{(x+1)^2}$

1°) Trouver les réels a et b tels que $f(x)=a+\dfrac{b}{(x+1)^2}$

2°) En déduire $I=\int_1^2 f(x)\,dx$.

EXERCICE 06:

1°) Soit la fonction *f* définie par $f(x)=\dfrac{2x+5}{(x+1)^2}$.

a) Trouver les réels a et b tels que pour tout x≠ -1 , $f(x)=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{b}{(x+1)^2}$

b) En déduire le calcul de $I=\int_0^3 \dfrac{2x+5}{(x+1)^2}dx$.

2°) Soit la fonction g définie par $g(x)=\dfrac{x^2-1}{x(x^2+1)}$.

a) Trouver les réels a , b et c tels que pour tout x≠0 , $g(x)=\dfrac{a}{x}+\dfrac{bx+c}{x^2+1}$

b) En déduire le calcul de $J=\int_1^3 \dfrac{x^2-1}{x(x^2+1)}dx$.

3°) Soit la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{x+5}{x^2-2x-3}$.

a) Déterminer l'ensemble de définition de f

b) Trouver les réels a et b tels que , $f(x)=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{b}{x-3}$

c) En déduire le calcul de $K=\int_0^2 \dfrac{x+5}{x^2-2x-3}\,dx$.

EXERCICE 07:

1°) On pose $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x+1)\cos^2 x\,dx \quad et \quad J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x+1)\sin^2 x\,dx$

a) Calculer I + J puis I – J

b) En déduire les valeurs de I et de J.

2°) Déterminer les réels a ; b et c tels que pour tout réel strictement positif x on ait : $\frac{1}{x(x^2+1)}=\frac{a}{x}+\frac{bx+c}{x^2+1}$

3°) Calculer $I=\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{x(x^2+1)}dx$; en déduire en utilisant l'intégration par partie le calcul de $J=\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\ln(x)}{x(x^2+1)}dx$

4°) Soit $I_n=\int_0^1 x^n e^{-x}dx$

a) Calculer I_0

b) Pour tout entier naturel n, en utilisant une intégration par parties,

c) Calculer I_{n+1} en fonction de I_n. En déduire I_4.

EXERCICE 08:

Pour tout entier naturel n >0 ; on pose : $I_n=\int_0^1 x^n\sqrt{3+x}\,dx \quad et \quad I_0=\int_0^1 \sqrt{3+x}\,dx$

1°) a) Calculer I_0

b) Calculer I_1 à l'aide d'une intégration par parties

2°) Comparer x^{n+1} et x^n lorsque $0 \leq x \leq 1$. En déduire que la suite (I_n) est décroissante.

3°) a) En procédant par encadrement, établir que : $\frac{\sqrt{3}}{n+1} \leq I_n \leq \frac{2}{n+1}$.

b) Etudier la limite de la suite (I_n) en + ∞.

4°) a) Démontrer que, pour tout nombre x de [0 ; 1] on a :

$$0\leq 2-\sqrt{x+3} \leq \frac{1}{2\sqrt{3}}(1-x)$$

b) Déduisez du résultat précédent que : $\frac{2}{n+1}-\frac{1}{2\sqrt{3}}\times\frac{1}{(n+1)(n+2)} \leq I_n \leq \frac{2}{n+1}$.

c) Déterminer la limite de la suite $(n\,I_n)$.

EXERCICE 09:

Soit la fonction f définie par $f(x) = e^{-x}\ln(1+e^{x})$.

On se propose de calculer : $I(\lambda) = \int_0^{\lambda} f(x)\,dx$, où $\lambda \in \mathbb{R}^+$

1°) Quel est le signe $I(\lambda)$?

2°) Trouver deux nombres réels a et b tels que pour tout réel x, $\frac{e^x}{1+e^x} = a + \frac{b}{1+e^x}$

3°) Calculer $J(\lambda) = \int_0^{\lambda} \frac{1}{1+e^x}\,dx$

4°) f' étant la fonction dérivée de f, calculer $f + f'$

5°) Calculer $I(\lambda)$.

EXERCICE 10:

Soit f une fonction numérique continue sur [0 ;1] et telle que pour tout x de [0 ;1] $\int_x^1 f(t)dt \geq \frac{1-x^2}{2}$. Soit F une primitive de f sur [0 ;1] .

1°) Prouver que : $F(1) = \int_0^1 xf(x)dx + \int_0^1 F(x)dx$.

2°) En déduire que : $\int_0^1 xf(x)dx \geq \frac{1}{3}$.

3°) En déduire que : $\int_0^1 [f(x)]^2\,dx \geq \frac{1}{3}$.

4°) Soit h définie par $h(x) = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\,dx$.

Démontrer que pour n élément de $\mathbb{N}$, on a : $\frac{1}{2(n+1)} \leq h(x) \leq \frac{1}{n+1}$.

EXERCICE 11:

1) Soit la fonction f continue sur [0 ;1] telle que,
pour tout réel x de [0 ;1] on a : $\frac{1}{x+2} \leq f(x) \leq \frac{1}{x+1}$.

Démontrer que : $\ln 1{,}5 \leq \int_0^1 f(x)dx \leq \ln 2$.

2) Pour tout entier naturel n on donne $I_n = \int_0^1 x^n \sin(\pi x)\,dx$

a) Calculer $\lim_{n\to+\infty} I_n$ (on remarquera que $\forall x \in [0,1]$, $0 \leq x^n \sin(\pi x) \leq x^n$)

b) Trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2}.

c) En déduire $\lim_{n\to+\infty} (n^2 I_n)$.

EXERCICE 12:

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x-1}{\left|x^2-2x\right|+1}$ et m un réel supérieur à 2.

Calculer $\int_1^2 f(x)dx, \quad puis \quad \int_1^m f(x)\,dx$.

Quelle est la valeur moyenne de f sur l'intervalle [1; m].

EXERCICE 13:

Pour tout entier naturel non nul n, on définit : $I_n = \int_1^e (\ln x)^n \; dx$.

1-/ a/ justifier l'existence de cette intégrale.

b/ Calculer I_1.

c/ Démontrer la relation : pour n ≥2, $I_n = e - nI_{n-1}$.

(on pourra effectuer une intégration par parties).

2-/ l'entier naturel non nul n étant fixé, on note F_n une primitive de la fonction $x \mapsto (\ln x)^n$ sur l'intervalle]0 ;+∞[.

a/ Démontrer que la fonction $t \mapsto F_n(e^t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et expliciter sa fonction dérivée.

b/ En déduire les propriétés suivantes :

- Pour tout entier naturel non nul $I_n = F_n(e) - F_n(1) = \int_0^1 t^n \, e^t \; dt$.
- Pour tout entier naturel non nul $0 \leq I_n \leq \dfrac{e}{n+1}$

Indication : pour la deuxième propriété, encadrer d'abord $t^n e^t$ sur [0 ; 1].

EXERCICE 14:

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \int_0^x \dfrac{e^t}{1+e^t} dt$

1°) Indiquer sans calcul $f'(x) \;\; et \;\; f(0)$;

2°) Etudier les variations de f ;

3°) Démontrer que pour tout nombre réel x : $f(x) = x + \ln\left(e^{-x} + 1\right) - \ln 2$

En déduire que la droite d'équation : $y = x - \ln 2$ est une asymptote à la courbe (C_f) de f.

4°) Construire dans le plan la courbe (C_f) de f.

EXERCICE 15:

Le but de l'exercice est de montrer que le nombre e, base des logarithmes népériens, n'est pas un nombre rationnel.

Partie A :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x\, e^{1-x}$.

On désigne par (C_f) la courbe représentative de f dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}\ ; \vec{j}\,)$ d'unité graphique 4cm.

1-/ Etudier les variations de f ; on précisera les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

2-/ Construire la courbe (C_f) dans le plan.

3-/ Utiliser une intégration par parties pour calculer : $I_1 = \int_0^1 f(x)\,dx$.

Quelle est l'interprétation géométrique de I_1.

Partie B :

Pour tout entier naturel supérieur ou égal à 1, on pose : $I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x}\,dx$.

1-/ a/ Montrer que $x^n \le x^n e^{1-x} \le e\,x^n$, pour tout x de [0 ;1].

b/ Exprimer en fonction de l'entier n : $J_n = \int_0^1 x^n\,dx$.

c/ Déduire de a/ et de b/ que l'on a : $\dfrac{1}{n+1} \le I_n \le \dfrac{e}{n+1}$ pour $n \ge 1$.

2-/ Utiliser une intégration par parties pour montrer que pour tout $n \ge 1$ on a :

$$I_{n+1} = (n+1)I_n - 1.$$

3-/ Pour tout entier $n \ge 1$ on pose $k_n = n!e - I_n$.

a/ Exprimer k_{n+1} à l'aide de k_n.

b/ Calculer k_1 (on pourra utiliser la 3ème question de la partie A).

En déduire, en procédant par récurrence sur n, que k_n est un nombre entier pour $n \ge 1$.

c/ Utiliser le b/ et le 1-/ c/ pour montrer que, quelque soit l'entier $n \ge 2$, le nombre $(n! \times e) = k_n + I_n$ est un entier.

4-/ a/ Soit p et q deux nombres entiers strictement positifs.

Montrer que, pour $n \ge q$, le nombre $\dfrac{n!\,p}{q}$ est un nombre entier.

b/ En déduire, à l'aide du 3-/ b/ et 3-/ c/ que e n'est pas un nombre rationnel.

EXERCICE 16:

Soit (I_n) la suite définie par $I_n = \int_0^{\pi} \sin^n x \, dx$. (on indique que $\sin^n x = \sin^{n-1} x \times \sin x$)

1°) Calculer I_0 et I_1.

2°) Sans calculer I_n, démontrer que la suite (I_n) est décroissante.

3°) A l'aide d'une intégration par parties de I_n démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$$

4°) a) Calculer I_9 ; I_{10} et I_{11}

b) En déduire que : $\frac{2^{17}}{3^4 \times 7^2 \times 11} \leq \pi \leq \frac{2^{16}}{3^4 \times 5 \times 7^2}$.

EXERCICE 17:

Pour tout entier naturel n on pose $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x} \, dx$.

1°) A l'aide d'une intégration par parties trouver une relation entre I_n et I_{n-1}

2°) Calculer I_0.

3°) Calculer I_n.

EXERCICE 18:

Pour tout entier naturel n on pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^{2n+1}(x)} dx$

1°) Déterminer les réels a et b tels que $\frac{1}{\cos(x)} = \frac{a\cos(x)}{1-\sin(x)} + \frac{b\cos(x)}{1+\sin(x)}$.

En déduire le calcul de $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos(x)} dx$.

2°) A l'aide d'une intégration par partie démontrer que $2nI_n = (2n-1)I_{n-1} + \frac{2^n}{\sqrt{2}}$

EXERCICE 19:

On se propose de trouver sans les calculer séparément les trois intégrales

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x \ dx \quad ; \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \ dx \ ; \ K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin^2 x \cos^2 x \ dx$$

1°) Calculer $I - J \ et \ I + J + K$.

2°) Exprimer $\cos 4x$ en fonction de $\cos x \ et \ \sin x$.

En déduire la valeur de $I + J - 3K$ puis celles de $I \ ; \ J \ ; \ K$.

EXERCICE 20:

On pose $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + 2\sin x} dx \ ; \ I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1 + 2\sin x} dx$ et $I_2 = I_1 + I$.

1°) Calculer I_2

2°) Calculer I_1

3°) En déduire I.

EXERCICE 21:

On considère les intégrales définies $I = \int_0^{\pi} \cos^4 x \, dx$ et $J = \int_0^{\pi} \sin^4 x \, dx$.

1°) a) Montrer que l'intégrale I peut s'écrire : $I = \int_0^{\pi} \cos x (\cos x - \cos x \sin^2 x) \, dx$

b) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I = \int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx - \frac{1}{3} J$.

c) Montrer aussi que l'intégrale J peut s'écrire : $J = \int_0^{\pi} \cos^2 x \, dx - \frac{1}{3} I$.

2°) a) Montrer que $I + J = \frac{3\pi}{4}$

b) Montrer que $J - I = 0$

c) En déduire les valeurs des intégrales I et J.