2éme Bac PC-SVT

Géométrie Dans l'espace

Exercice 1:

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

On considère les points $A(0;-2;-2)$; $B(1;-2;-4)$ et $C(-3;-1;2)$.

1) Montrer que $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$ et en déduire que : $2x+2y+z-6=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).

2) On considère la sphère (S) et $x^2+y^2+z^2-2x-2z-23=0$ l'une de ses équations cartésiennes

Vérifier que le centre de la sphère S est $\Omega(1;0;1)$ et son rayon est $R=5$.

3) a) Vérifier que : $\begin{cases} x=1+2t \\ y=2t \\ z=1+t \end{cases}$ $(t\in\mathrm{IR})$ est une représentation paramétrique la droite (Δ) passant par Ω et perpendiculaire au plan (ABC) .

b) Déterminer les coordonnée du point H l'intersection de la droite (Δ) et du plan (ABC) .

4) Vérifier que $d(\Omega;(ABC))=3$ et montrer que plan coupe la sphère (S) selon un cercle de rayon $r=4$ et de centre à préciser

Exercice 2 :

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

On considère la sphère (S) de centre $\Omega(2;1;2)$ et de rayon $R=3$ et le plan (P) passant par $A(0;-2;-2)$ dont $\vec{u}(4;0;-3)$ un vecteur normal à ce plan.

1) Montrer que : $x^2+y^2+z^2-4x-2y-4z=0$ est une équation de la sphère (S) .

2) Vérifier que : $4x-3z+13=0$ est une équation cartésienne du plan (P) .

a) Vérifier que : $\begin{cases} x=2+4t \\ y=1 \\ z=2-3t \end{cases}$ $(t\in\mathrm{IR})$ une représentation paramétrique la droite (Δ) passant par Ω et perpendiculaire au plan (P) .

b) Déterminer les coordonnées du point H l'intersection la droite (Δ) et du plan (P) .

4) a) Calculer $d(\Omega;(P))$.

b) Montrer que le plan (P) est tangeant à la sphère (S) en un point à déterminer.

Exercice 3 :

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

On considère le plan (P) passant par le point passant par $A(0;1;1)$ dont $\vec{u}(1;0;-1)$ un vecteur normal à ce plan et la sphère (S) de centre $\Omega(0;1;-1)$ et de rayon $R=\sqrt{2}$.

1) a) Montrer que : $x-z+1=0$ est une équation cartésienne du plan (P) ..

b) Montrer que le plan (P) est tangent à la sphère (S) et vérifier que le point $B(-1;1;0)$ est leur point de contact.

2) a) Déterminer une représentation paramétrique la droite (Δ) passant par Ω est perpendiculaire au plan (P).

b) Montrer que la droite (Δ) est tangeante à la sphère (S) en $C(1;1;0)$.

Montrer que $OC \wedge OB = 2k$ et en déduire l'aire du triangle OCB.

Exercice 4 :

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O;i;j;k)$

On considère la sphère (S) d'équation $x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z-1=0$ et le plan (P) d'équation $y-z=0$

a) Montrer que $\Omega(1;1;1)$ est le centre de la sphère (S) et $R=2$ est son rayon.

b) Calculer $d(\Omega;(P))$ et en déduire que plan coupe la sphère (S) suivant un cercle (C).

c) Déterminer le centre et le rayon du cercle (C).

2 / Soit la droite (Δ) passant par $A(1;-2;2)$ est perpendiculaire au plan (P).

a) Vérifier que $u(0;1;-1)$ est un vecteur directeur de la droite (Δ).

b) Montrer que $\Omega A \wedge u = \quad 2u$ et en déduire que la droite (Δ) coupe la sphère (S) en deux points.

c) Déterminer le triplet des coordonnées de chaque point des deux points d'intersection de la droite (Δ) et la sphère (S).

Exercice 5 :

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O;i;j;k)$.

On considère les points $A(2;1;3)$; $B(3;1;1)$ et $C(2;2;1)$; la sphère (S) d'équation cartésienne $x^2+y^2+z^2-2x+2y-34=0$.

1) a) Montrer que : $AB \wedge AC = 2i+2j+k$.

b) En déduire que : $2x+2y+z-9=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).

2) a) Montrer que le centre de la sphère (S) est $\Omega(1;-1;0)$ et son rayon est $R=6$.

b) Vérifier que $d(\Omega;(ABC)) = 3$ en déduire que plan (ABC) coupe la sphère (S) selon un cercle (Γ).

3) a) Déterminer une représentation paramétrique la droite (Δ) passant par Ω et perpendiculaire au plan (ABC).

b) Montrer que B est le centre du cercle (Γ).

Exercice 6 :

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O;i;j;k)$. On considère les points $A(1;3;4)$; $B(0;1;2)$.

1) a) Montrer que : $OA \wedge OB = 2i - 2j + k$

b) Montrer que $2x-2y+z=0$ est une équation cartésienne du plan (OAB).

2) Soit la sphère (S) d'équation cartésienne $x^2+y^2+z^2-6x+6y-6z+2=0$.

Montrer que le centre de la sphère (S) est $\Omega(3;-3;3)$ et son rayon est $R=5$.

3) a) Montrer que le plan (OAB) est tangeant à la sphère (S).

b) Déterminer les coordonnées du point H point de contact de la sphère (S) et du plan (OAB).

Exercice 7 :

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

On considère les points $A(2;1;0)$ *;* $B(-4;1;0)$.

1) Soit le plan (P) *passant par A et* $\vec{u} = \vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ *un vecteur normal à* (P) .

Montrer que $x+y-z-3=0$ *est une équation cartésienne du plan* (P) .

2) Soit (S) *l'ensemble des points* M *de l'espace qui vérifient* $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$.

Montrer que (S) *est la sphère de centre* $\Omega(-1;1;0)$ *et de* $R=3$.

3) a) Calculer $d(\Omega;(P))$ *; en déduire que plan* (P) *coupe la sphère* (S) *selon un cercle* (Γ).

b) Montrer que le centre du cercle (Γ) *est le point* $H(0;2;-1)$.

4) Montrer que : $\overrightarrow{OH}\wedge\overrightarrow{OB}=\vec{i}+4\vec{j}+8\vec{k}$ *; en déduire l'aire du triangle* OHB.

Exercice 8 :

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

On considère le plan (P) *d'équation cartésienne :* $x+y+z+4=0$ *et la sphère* (S) *de centre* $\Omega(1;-1;-1)$ *et de* $R=\sqrt{3}$.

1) a) Calculer $d(\Omega;(P))$ *et en déduire que plan* (P) *est tangent à la sphère* (S)

b) Vérifier que le point $H(0;-2;-2)$ *est le point de contact du plan* (P) *et de la sphère* (S) .

2) On considère les points $A(2;1;1)$ *et B* $(1;0;1)$.

a) Vérifier que : $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}=\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$ *et en déduire que* $x-y-z=0$ *est une équation cartésienne du plan* (OAB) .

b) Calculer $d(\Omega;(P))$ *et en déduire que plan* (OAB) *est tangeant à la sphère* (S).

3) a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) *passant par* Ω *et perpendiculaire au plan* (OAB).

b) Déterminer les coordonnées du point de contact du plan (OAB) *et la sphère* (S) .

Exercice 9 :

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

On considère les points $A(0;3;1)$ *;* $B(-1;3;0)$ *;* $C(0;5;0)$ *et la sphère* (S) *d'équation cartésienne* $x^2+y^2+z^2-4x-5=0$.

1) a) Montrer que : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=2\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}$ *; en déduire que les points A ;B et C ne sont pas alignés.*

b) Montrer que : $2x-y-2z+5=0$ *est une équation cartésienne du plan* (ABC) .

2) a) Montrer que la sphère (S) *est de centre* $\Omega(2;0;0)$ *et de rayon* 3.

b) Montrer que plan (ABC) *est tangeant à la sphère* (S).

c) Déterminer les coordonnées de H point de contact du plan (ABC) *et de la sphère* (S).

Exercice 10 :

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

On considère le point $A(0;0;1)$ *; le plan* (P) *d'équation cartésienne* $2x+y-2z-7=0$ *et la sphère* (S) *de centre* $\Omega(0;3;-2)$ *et de* $R=3$.

1) a)Montrer que : $\begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ est une représentation paramétrique la droite (Δ) passant par A et perpendiculaire au plan (P).

b) Vérifier que le point $H(2;1;-1)$ est le point d'intersection du plan (P) et de la droite (Δ).

2) a)Montrer que : $\Omega A \wedge u = 3(i + 2j + 2k)$ avec $u = 2i + j - 2k$.

b) Montrer que la distance du point Ω à la droite (Δ) est égale à 3 ; En déduire que la droite (Δ) est tangeante à la sphère (S) ; et vérifier que H est le point de contact de la droite (Δ) et de la sphère (S).

Exercice 11 :

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O;i;j;k)$.

On considère les points $A(-1;1;0)$; $B(1;0;1)$; $\Omega(1;1;-1)$ et la sphère (S) de centre Ω et de rayon 3.

1) a)Montrer que: $OA \wedge OB = i + j - k$ et vérifier que $x + y - z = 0$ est une équation cartésienne du plan (OAB).

b) Vérifier que $d(\Omega;(OAB)) = \sqrt{3}$ en déduire que plan (OAB) coupe la sphère (S) selon un cercle (Γ) de rayon $\sqrt{6}$.

2) Soit (Δ) la droite passant par Ω et perpendiculaire au plan (OAB).

a) Montrer que : $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = -1 - t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ est une représentation paramétrique la droite (Δ)

b) Déterminer les coordonnées du centre du cercle (Γ).

Exercice 12 :

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O;i;j;k)$.

On considère les points $A(0;0;1)$; $B(1;1;1)$; $C(2;1;2)$ et la sphère (S) de centre $\Omega(1;-1;0)$ et de rayon 3.

1) Montre que : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 1 = 0$ est une équation cartésienne de la sphère (S) ; et vérifier que A appartient à (S).

2) a) Montrer que : $AB \wedge AC = i - j - k$; en déduire que : $x - y - z + 1 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).

b) Calculer $d(\Omega;(ABC))$; en déduire que plan (ABC) est tangeant à la sphère (S) en A.

2) Soit (Δ) la droite passant par Ω et perpendiculaire au plan (ABC).

a) Montrer que : $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - t \\ z = -t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de la droite (Δ).

b) En déduire les coordonnée des deux points d'intersection de la droite (Δ) et la sphère (S).

Exercice 13 :

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O;i;j;k)$.

On considère les points $A(1;1;-1)$; $B(0;1;-2)$; $C(3;2;1)$ et la sphère (S) d'équation cartésienne

$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z - 1 = 0$.

1) Montrer que la sphère (S) *est de centre* $\Omega(1;0;1)$ *et de rayon* 3 .

2) a) Montrer que : $AB \wedge AC = i - k$ *; en déduire que* $x - z - 2 = 0$ *est une équation cartésienne du plan* (ABC).

b) Vérifier que $d(\Omega;(ABC)) = \ 2$ *; en déduire que plan* (ABC) *coupe la sphère* (S) *selon un cercle* (Γ) *de rayon* 1.

3) Soit (Δ) *la droite passant par* Ω *et perpendiculaire au plan* (ABC).

a) Montrer que : $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 0 \\ z = 1 - t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ *est une représentation paramétrique de la droite* (Δ) .

b) Montrer que le triplet des coordonnées du point H point d'intersection de la droite (Δ) *et du plan* (ABC) *est* $(2;\ 0;\ 0)$.

c) En déduire le centre du cercle (Γ) .