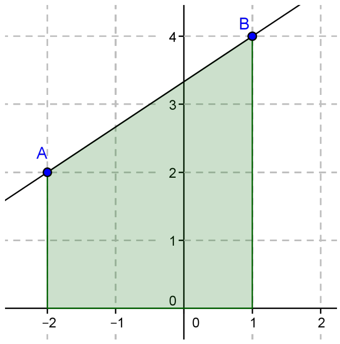
Intégrale d'une fonction : Exercices
Corrigés en vidéo avec le cours sur jaicompris.com

Intégrale et aire

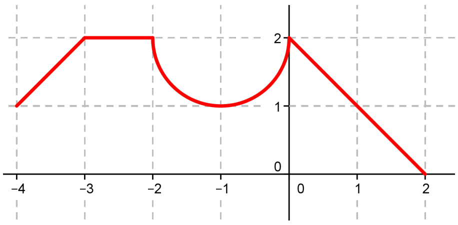


On considère la fonction affine f dont la courbe ci-contre passe par les points A et B.

1) Déterminer l'expression de $f(x)$.
2) En déduire une primitive F de f.

3) a) Déterminer l'intégrale $\displaystyle\int_{-2}^{1} f(x)\mathrm{d}x$ à l'aide de F.
En déduire l'aire du domaine vert.
b) Déterminer l'aire du domaine vert d'une autre façon.

Intégrale et aire



On a tracé la courbe d'une fonction f définie sur [-4 ;2].
Sur [-2 ;0], la courbe est un demi-cercle.

1) Déterminer $\displaystyle\int_{-4}^{-2} f(x)\mathrm{d}x$, puis $\displaystyle\int_{-2}^{0} f(x)\mathrm{d}x$, puis $\displaystyle\int_{0}^{2} f(x)\mathrm{d}x$
2) En déduire $\displaystyle\int_{-4}^{2} f(x)\mathrm{d}x$

Calcul intégral - Intégrale d'un polynôme - x^n
Calculer les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_{-1}^{2} 2x^5 - x^2 - 1\ \mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int_{0}^{-1} (1-t^2)(2+3t)\mathrm{d}t$ c) $\displaystyle\int_{2}^{5} \frac{2}{3}\mathrm{d}x$ d) $\displaystyle\int_{-1}^{3} \frac{1}{n}\ \mathrm{d}x$

Intégrale et primitive d'un quotient - $\dfrac{u'}{u}$
Calculer les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{1+2x}\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int_{1}^{e} \frac{6x^2+4x-1}{x}\mathrm{d}x$ c) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x^2}{1+x^3}\mathrm{d}x$ d) $\displaystyle\int_{1}^{4} \frac{1}{3t} - \frac{3}{t^2}\mathrm{d}t$

Intégrale et primitive avec des exponentielles ou des racines - $u'e^u$ - $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$
Calculer les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_{0}^{1} e^{-x} + \frac{6}{e^{2x}}\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int_{-1}^{2} xe^{-x^2}\mathrm{d}x$ c) $\displaystyle\int_{0}^{4} \frac{3}{\sqrt{2x+1}}\mathrm{d}x$

Intégrale et primitive d'un quotient - $\dfrac{u'}{u}$
Calcul intégral avec un quotient de polynôme :

1) Étudier suivant les valeurs du réel x, le signe de x^2+2x+5.
2) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_{-2}^{1} \frac{x+1}{x^2+2x+5}\mathrm{d}x$

Intégrale et primitive

Calculer les intégrales suivantes :

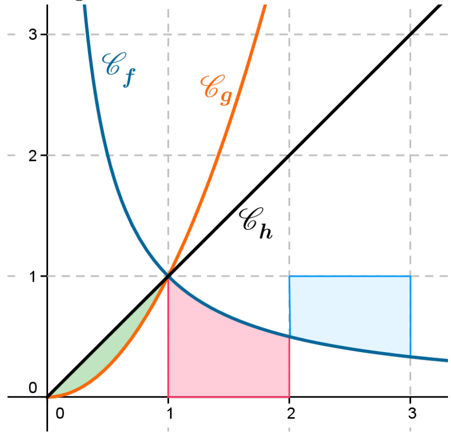
a) $\displaystyle\int_{-4}^{-2} x - 1\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int_{5}^{2} \frac{1}{2x+1}\mathrm{d}x$ c) $\displaystyle\int_{-2}^{1} e^{2t-1}\mathrm{d}t$ d) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x^2+x-1}{4}\mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{e^x}{e^x+1}\mathrm{d}x$ f) $\displaystyle\int_{0}^{3} \frac{1}{(2x+1)^2}\mathrm{d}x$ g) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x)\mathrm{d}x$ h) $\displaystyle\int_{1}^{3} \frac{t^2-2t+3}{t}\mathrm{d}t$

Intégrale et aire

On a tracé la courbe de la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

On a tracé également les courbes des fonctions g et h définies sur $[0;+\infty[$ par $g(x) = x^2$ et $h(x) = x$.

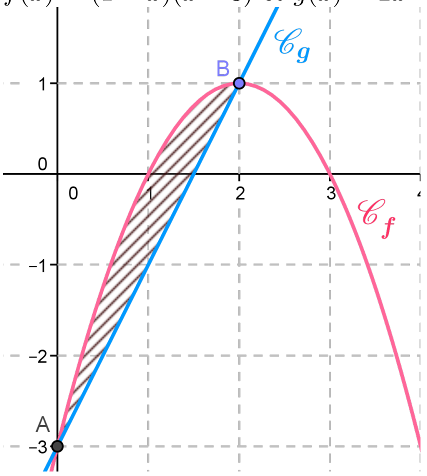


1) Déterminer l'aire du domaine rose.
2) Déterminer l'aire du domaine bleu.
3) Déterminer l'aire du domaine vert.

Intégrale et aire entre deux courbes

On a représenté les courbes des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

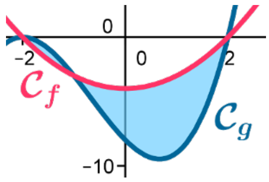
$f(x) = (1-x)(x-3)$ et $g(x) = 2x-3$.



Déterminer l'aire de la surface hachurée.

Intégrale et aire entre deux courbes

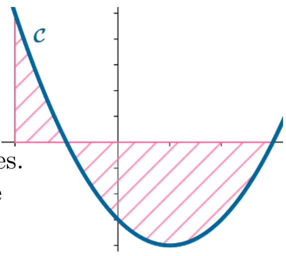
$\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont les courbes représentatives de deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2-4$ et $g(x) = (x+2)^2(x-2)$.



1) Étudier la position relative de leurs courbes représentatives.
2) En déduire l'aire $\mathcal{A}$ du domaine en unité d'aire compris entre les deux courbes sur l'intervalle [-2 ;2].

Intégrale et aire - fonction changeant de signe

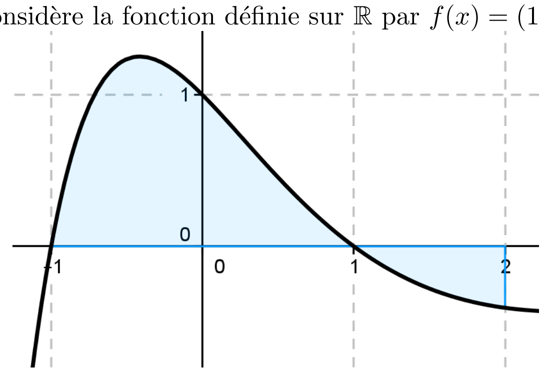
La courbe $\mathcal{C}$ représente dans un repère orthogonal, la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2-2x-3$. Les unités graphiques sont : 1 cm sur l'axe des abscisses et 0.5 cm sur l'axe des ordonnées.



1) Étudier la position relative de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à l'axe des abscisses.
2) En déduire l'aire $\mathcal{A}$ du domaine en unité d'aire puis en cm^2 compris entre la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=-2$ et $x=3$.

Intégrale et aire - fonction changeant de signe

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1-x^2)e^{-x}$ dont on a tracé la courbe ci-dessous :



1) Déterminer a, b et c tels que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\mathrm{F}(x) = (ax^2+bx+c)e^{-x}$ soit une primitive de f.
2) En déduire l'aire de la surface bleue.

Fonction définie par une intégrale - signe d'une intégrale
On donne ci-dessous le tableau de variations d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	-4	1	2	$+\infty$
f	1 $\nearrow$	3 $\searrow$	0 $\searrow$	-5 $\nearrow$	-1

On définit la fonction F sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)\mathrm{d}t$.

1) Déterminer le tableau de variations de F.
2) Déterminer le signe de l'intégrale $\displaystyle\int_1^3 f(t)\mathrm{d}t$ et de $\displaystyle\int_1^{-5} f(t)\mathrm{d}t$.
3) Déterminer la limite de F en $+\infty$ et en $-\infty$.

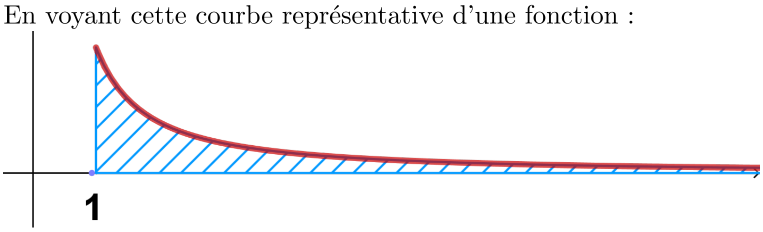
Signe d'une intégrale

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^{-4x}}{1+e^{-4x}}$.

Pour tout réel x, on pose $\mathrm{I}(x) = \displaystyle\int_3^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

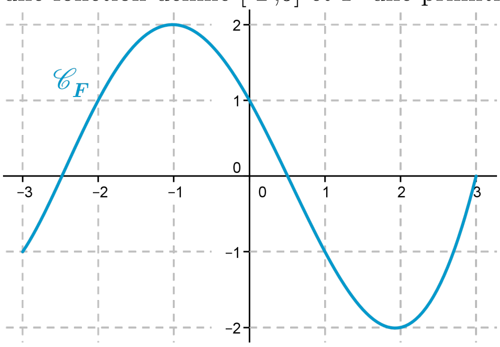
Déterminer le signe de $\mathrm{I}(x)$ en fonction de x, en justifiant.

Intégrale - Aire finie ou infinie ?
En voyant cette courbe représentative d'une fonction :



Lætitia affirme que : "Si la fonction représentée tend vers 0 en $+\infty$ alors l'aire hachurée sous la courbe sur $[1; +\infty[$ est finie".
Antoine lui répond : "Même si cette fonction tend vers 0 en $+\infty$, la longueur de l'intervalle $[1; +\infty[$ étant infinie, l'aire hachurée ne peut pas être finie".
A l'aide de deux exemples, justifier qu'ils ont tort tous les deux.

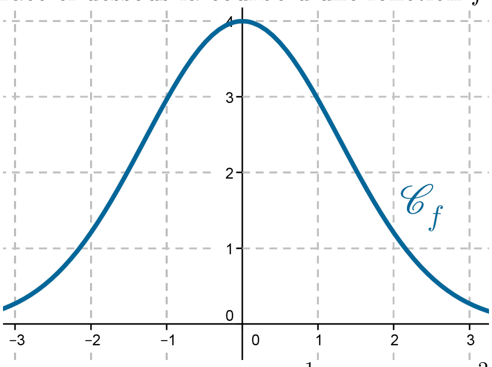
Fonction connaissant une primitive
Soit f une fonction définie [-2 ;5] et F une primitive de f. On a tracé la courbe de F ci-dessous :



1) Déterminer le tableau de signe de f sur [-2 ;5].
2) Déterminer la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x$.

Comparer des intégrales

On a tracé ci-dessous la courbe d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.



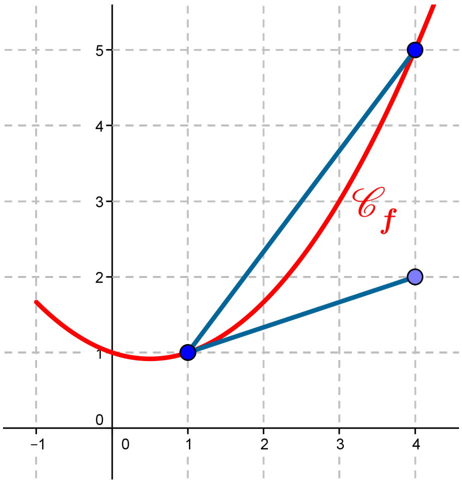
1) Comparer les intégrales $\displaystyle\int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_1^2 f(x)\ \mathrm{d}x$.

2) Comparer les intégrales $\displaystyle\int_{-2}^0 f(x)\ \mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^2 f(x)\ \mathrm{d}x$.

3) Encadrer l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^2 f(x)\ \mathrm{d}x$.

Encadrer une intégrale

On a tracé ci-dessous la courbe d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.



Déterminer un encadrement de l'intégrale $\displaystyle\int_1^4 f(x)\ \mathrm{d}x$.

Fonction définie par une intégrale

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{1+t^2}\ \mathrm{d}t$.

1) Justifier que g est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2) Déterminer le tableau de variations de g.
3) Déterminer le tableau de signe de $g(x)$.
4) Démontrer que pour tout $x \geq 1$, $g(x) \leq 1$.
5) Démontrer que l'inégalité du 4) reste vraie pour $x \leq 1$.

QCM Intégrale

f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses en justifiant :

a) $\displaystyle\int_2^{-1} f(x)\ \mathrm{d}x = -\int_1^{-2} f(x)\ \mathrm{d}x$

b) Si $\displaystyle\int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x = \int_0^1 g(x)\ \mathrm{d}x$ alors pour tout $x \in [0;1]$, $f(x) = g(x)$.

c) Si $\displaystyle\int_{-1}^1 f(x)\ \mathrm{d}x = 0$ alors pour tout $x \in [-1;1]$, $f(x) = 0$.

d) Si f est positive sur [2 ;3] alors $\displaystyle\int_2^3 f(x)\ \mathrm{d}x \geq 0$.

e) Si $\displaystyle\int_2^3 f(x)\ \mathrm{d}x \geq 0$ alors pour tout $x \in [2;3]$, $f(x) \geq 0$.

f) $\displaystyle\int_2^3 f'(x)\ f(x)\ \mathrm{d}x = F(3) - F(2)$ où $F = f^2$.

Fonction définie par une intégrale - dérivée - variations

On considère la fonction g définie par $g(x) = \displaystyle\int_{-1}^{x} \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses en justifiant :

a) La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$.

b) $g'(-1) = 0$

c) $g(-1) = 0$

d) g est croissante sur $\mathbb{R}$.

e) $g(x) = \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)$.

Inégalité et intégrale

1) Démontrer que pour tout $x \geq 1$, $\dfrac{1}{2x} \leq \dfrac{1}{x+\sqrt{x}} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

2) En déduire un encadrement de l'intégrale : $\displaystyle\int_{2}^{3} \frac{1}{x+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

Inégalité et intégrale - encadrement de $\ln x$

1) Démontrer que pour tout réel $t \geq 1$, $\dfrac{1}{t^2} \leq \dfrac{1}{t} \leq \dfrac{1}{\sqrt{t}}$.

2) En déduire que pour tout réel $x \geq 1$, $1 - \dfrac{1}{x} \leq \ln x \leq 2\sqrt{x} - 2$.

3) En déduire un encadrement de $\ln 2$. Vérifier la cohérence du résultat à l'aide d'une calculatrice.

Inégalité et intégrale - encadrement de $\ln 2$

1) Démontrer que pour tout $t \geq 0$, $1 - t \leq \dfrac{1}{1+t} \leq 1 - t + t^2$.

2) En déduire que pour réel $x \geq 0$, $x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$.

3) En déduire un encadrement de $\ln 2$. Vérifier la cohérence du résultat à l'aide d'une calculatrice.

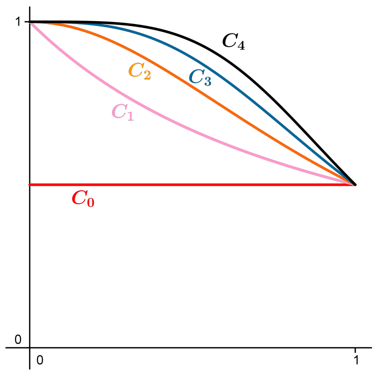
Suite définie par une intégrale

Pour tout entier naturel n, on pose : $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x$,

f_n désigne la fonction définie sur $[0\,;1]$ par $f_n(x) = \dfrac{1}{1+x^n}$,

C_n désigne la courbe de f_n.

On a tracé C_0, C_1, C_2, C_3, C_4 dans un repère orthonormé.



1) A l'aide du graphique, conjecturer le sens de variation de (u_n).

2) Déterminer le sens de variation de (u_n) par le calcul.

3) Démontrer que pour tout entier naturel n, et tout $x \in [0;1]$:

$$\frac{1}{1+x^n} \leq 1$$

4) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

Suite définie par une intégrale

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \int_0^n \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

1) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
2) Justifier que pour tout entier $n \geq 1$, $u_n \leq \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + \int_1^n \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$.
3) Démontrer que $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \leq 1$. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

Suite définie par une intégrale

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \int_0^1 x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x$.

1) Déterminer u_0.
2) Démontrer que (u_n) est décroissante.
3) Démontrer que (u_n) est convergente.
4) Démontrer que pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$.
5) Que peut-on déduire ?

Fonction définie par une intégrale - dérivation - variations - limite

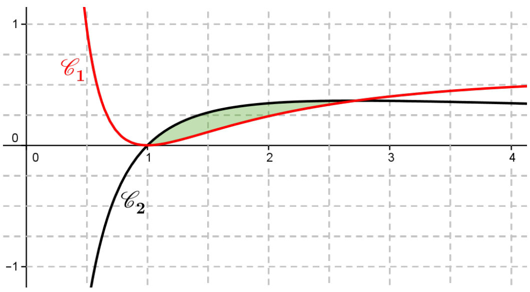
On considère la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t$.

1) Justifier que f est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$, déterminer $f'(x)$ puis les variations de f.
2) En déduire le tableau de signe de $f(x)$.
3) Démontrer que pour tout réel $t \in]0;+\infty[$, $\frac{e^t}{t} \geq \frac{1}{t}$.
4) Déduire du 3) que pour tout $x \in [1;+\infty[$, $f(x) \geq \ln x$.
5) Déduire du 3) que pour tout $x \in]0;1]$, $f(x) \leq \ln x$.
6) En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x)$.

Intégrale et aire entre deux courbes

On se place dans un repère orthogonal d'unité 2 cm sur l'axe des abscisses et 4 cm sur l'axe des ordonnées.

On a tracé les courbes de 2 fonctions f et g définies sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ et $g(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}$.



1) Associer à chaque fonction la courbe qui lui correspond. Justifier.
2) Déterminer les positions relatives des courbes de f et g par le calcul.
3) Déterminer une primitive de f puis de g sur $]0;+\infty[$.
4) Déterminer l'aire du domaine vert en unité d'aire puis en cm^2.

Intégrale et primitive

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+2)e^{\frac{1}{2}x}$.

Soit u et v les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x$ et $v(x) = e^{\frac{1}{2}x}$.

a) Vérifier que $f = 2(u'v + uv')$.
b) En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

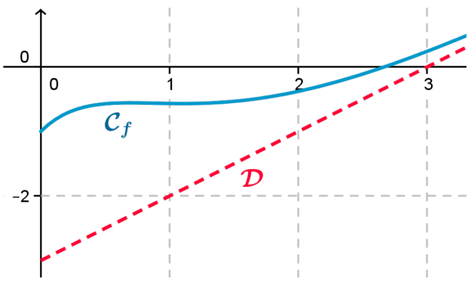
D'après sujet Bac Pondichéry 2015 Terminale S

Soit f et h les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{3}{1+\mathrm{e}^{-2x}}$ et $h(x) = 3 - f(x)$.

1. Justifier que la fonction h est positive sur $\mathbb{R}$.
2. Soit H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $H(x) = -\dfrac{3}{2}\ln\left(1+\mathrm{e}^{-2x}\right)$.
   Démontrer que H est une primitive de h sur $\mathbb{R}$.
3. Soit a un réel strictement positif.
   a. Donner une interprétation graphique de l'intégrale $\displaystyle\int_0^a h(x)\,\mathrm{d}x$.
   b. Démontrer que $\displaystyle\int_0^a h(x)\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\ln\left(\frac{2}{1+\mathrm{e}^{-2a}}\right)$.
   c. On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des points $M(x\ ;\ y)$ du plan définis par $\begin{cases} x \geqslant 0 \\ f(x) \leqslant y \leqslant 3 \end{cases}$.
   Déterminer l'aire, en unité d'aire, du domaine $\mathcal{D}$.

Baccalauréat 2014 - Amérique du Nord exercice 2
Intégrale et aire - théorème des valeurs intermédiaires - calcul d'intégrale

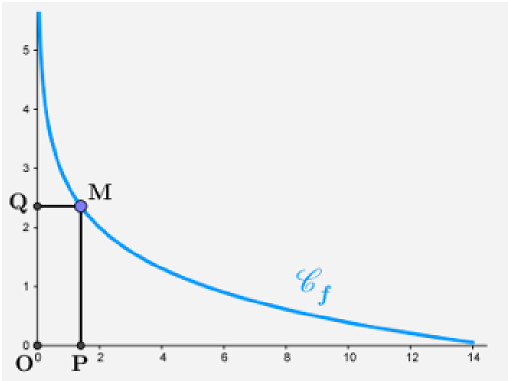
On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = 5e^{-x} - 3e^{-2x} + x - 3$.
On note $\mathcal{C}_f$ la représentation graphique de la fonction f et $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = x - 3$ dans un repère orthogonal du plan. On considère la fonction $\mathcal{A}$ définie sur $[0;+\infty[$ par $\mathcal{A}(x) = \displaystyle\int_0^x f(t) - (t-3)\,\mathrm{d}t$.



1. Justifier que, pour tout réel t de $[0;+\infty[$, $f(t) - (t-3) > 0$.
2. Hachurer sur le graphique ci-contre le domaine dont l'aire est donnée par $\mathcal{A}(2)$.
3. Justifier que la fonction $\mathcal{A}$ est croissante sur $[0;+\infty[$.
4. Pour tout réel $x \geq 0$, calculer $\mathcal{A}(x)$.
5. Existe-t-il une valeur de x telle que $\mathcal{A}(x) = 2$?

Logarithme et aire maximale d'un rectangle

Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,14]$ par $f(x) = 2 - \ln\left(\dfrac{x}{2}\right)$ dont la courbe $\mathscr{C}_f$ est donnée dans le repère orthogonal d'origine O ci-contre :



À tout point M appartenant à $\mathscr{C}_f$, on associe le point P projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses, et le point Q projeté orthogonal de M sur l'axe des ordonnées.

- f est-elle positive sur $]0; 14]$?
- L'aire du rectangle OPMQ est-elle constante, quelle que soit la position du point M sur $\mathscr{C}_f$?
- L'aire du rectangle OPMQ peut-elle être maximale ? Si oui, préciser les coordonnées du point M correspondant. Justifier les réponses.

Calculer une intégrale à l'aide d'un argument géométrique

L'objectif de cet exercice est de calculer : $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.
1) Déterminer le domaine de définition de la fonction f.
2) Quelle conjecture peut-on faire concernant la courbe de la fonction f ? Démontrer cette conjecture.
3) En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Suite définie par une intégrale
Soit un entier $n \geqslant 1$.
On note f_n la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle $[0;1]$ par $f_n(x) = \dfrac{1}{1+x^n}$.
Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.
1) Déterminer I_1.
2) Démontrer que, pour tout réel $x \in [0;1]$ et pour tout entier $n \geqslant 1$, on a : $1 - x^n \leqslant \dfrac{1}{1+x^n} \leqslant 1$
3) En déduire que la suite (I_n) est convergente et préciser sa limite.