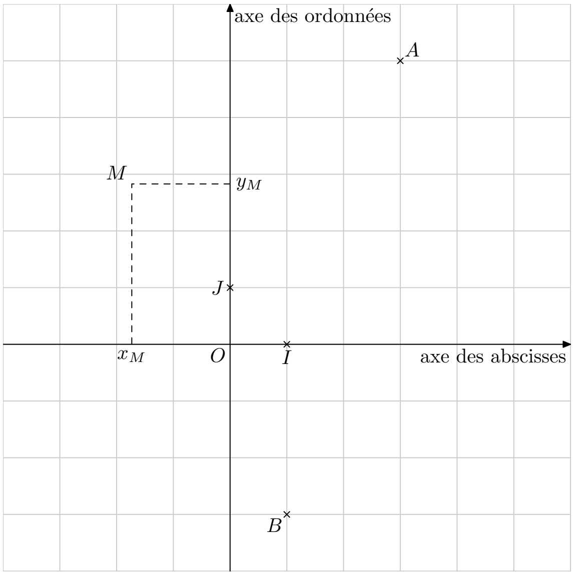
1 Coordonnées d'un point

Définition 1 *Deux axes gradués de même origine et perpendiculaires définissent* un repère orthogonal.

De plus, si les axes possèdent la même unité de longueur alors le repère est dit orthonormé.



Dans l'exemple ci-contre, on dira que les coordonnées du point M sont (x_M, y_M), que celles du point A sont $(3;5)$ et que celles du point B sont $(1;-3)$.

Propriété 1 *Dans un repère quelconque, soit A et B deux points de coordonnées respectives* $(x_A ; y_A)$ *et* $(x_B ; y_B)$. *Alors les coordonnées du point K, milieu du segment* $[AB]$ *sont*

$$x_K = \frac{x_A + x_B}{2} \qquad y_K = \frac{y_A + y_B}{2}$$

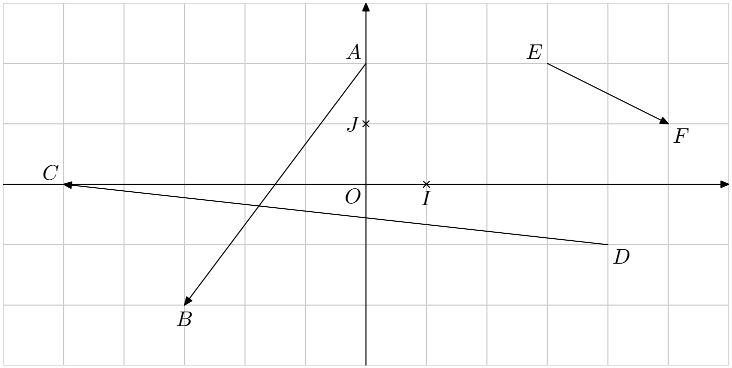
Exemple Sur la figure ci-dessus, le milieu K du segment $[AB]$ a pour coordonnées

$$\begin{aligned} x_K &= \frac{x_A + x_B}{2} & \qquad y_K &= \frac{y_A + y_B}{2} \\ x_K &= \frac{3+1}{2} & y_K &= \frac{5+(-3)}{2} \\ x_K &= \frac{4}{2} & y_K &= \frac{2}{2} \\ x_K &= 2 & y_K &= 1 \end{aligned}$$

2 Coordonnées d'un vecteur

Propriété 2 *Dans un repère quelconque, soit E et F deux points de coordonnées respectives* $(x_E ; y_E)$ *et* $(x_F ; y_F)$. *Alors les coordonnées du vecteur* $\overrightarrow{EF}$ *sont*

$$(x_F - x_E \,;\, y_F - y_E)$$



Exemples
Sur la figure ci-dessus, on a

$\overrightarrow{AB}(x_B - x_A\,;\, y_B - y_A)$ $\quad$ $\overrightarrow{DC}(x_C - x_D\,;\, y_C - y_D)$

$\overrightarrow{AB}(-3-0\,;\,-2-2)$ $\quad$ $\overrightarrow{DC}(-5-4\,;\,0-(-1))$

$\overrightarrow{AB}(-3\,;\,-4)$ $\quad$ $\overrightarrow{DC}(-9\,;\,1)$

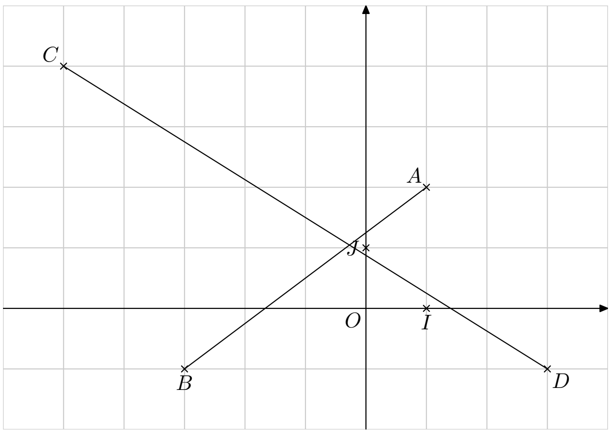
Vérification graphique Le déplacement de A à B correspond graphiquement à un déplacement horizontal de 3 unités dans le sens négatif suivi d'un déplacement vertical de 4 unités dans le sens négatif.

Propriété 3 *Deux vecteurs égaux ont les mêmes coordonnées.*

3 Distance dans un repère orthonormé

Propriété 4 *Dans* **un repère orthonormé**, *soit E et F deux points de coordonnées respectives* $(x_E; y_E)$ *et* $(x_F; y_F)$. *Alors, on a*

$$EF^2 = (x_F - x_E)^2 + (y_F - y_E)^2 \quad et \quad EF = \sqrt{(x_F - x_E)^2 + (y_F - y_E)^2}$$



Exemples Sur la figure ci-dessus, le repère est orthonormé : on a donc

$AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$

$AB^2 = (-3-1)^2 + (-1-2)^2$

$AB^2 = (-4)^2 + (-3)^2$

$AB^2 = 16 + 9$

$AB^2 = 25$

$AB = 5$

$CD^2 = (x_D - x_C)^2 + (y_D - y_C)^2$

$CD^2 = (3-(-5))^2 + (-1-4)^2$

$CD^2 = (3+5)^2 + (-5)^2$

$CD^2 = 64 + 25$

$CD^2 = 89$

$CD = \sqrt{89}$

Remarques Les réponses sont données dans l'unité de longueur commune aux deux axes.

4 Exercice d'application

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J)*. L'unité choisie est le centimètre. Faire une figure et la compléter au fur et à mesure.*

1. Placer les points $A(4;5)$, $B(0;-3)$ et $C(-6;0)$.
2. (a) Montrer que $AB = \sqrt{80}\,cm$, $AC = \sqrt{125}\,cm$ et $BC = \sqrt{45}\,cm$.
   On utilise la Propriété 4.

   (b) En déduire que ABC est un triangle rectangle. Préciser l'angle droit.
   On utilise la réciproque du Théorème de Pythagore.

3. (a) Construis le point D tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

   (b) Démontrer que $ABCD$ est un rectangle.

   On démontre que ABCD est un parallélogramme qui possède un angle droit.

   (c) Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$.

   On utilise la Propriété 2.

   (d) Vérifier à l'aide d'un calcul que les coordonnées du point D sont $(-2; 8)$.

   Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont égaux donc leurs coordonnées sont égales.

4. (a) Calculer les coordonnées du point K milieu du segment $[AC]$.

   On utilise la Propriété 1.

   (b) Que représente le point K pour le quadrilatère $ABCD$?

   Pensez aux diagonales.