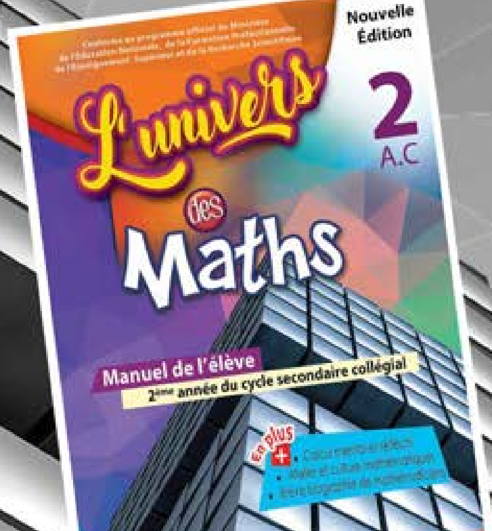
Conforme au programme marocain

2 A.C

L'univers des Maths

Mathématiques

Guide de l'Enseignant



2ème année du cycle secondaire collégial

Collection MAARIF Collège

Conforme au programme marocain

2 A.C

L'univers des Maths

Mathématiques

Guide de l'Enseignant

2ème année du cycle secondaire collégial

Equipe pédagogique coordonnée par :
Moulay Mohamed OUAHIDI
Hassane AGHZERE
Mounir ELAOUFI

Collection MAARIF Collège

Guide de l'enseignant
L'Univers des Maths - 2ème année du cycle secondaire collégial
Edition : 2019
Dépôt légal : 2018 MO 0788
ISBN : 978-9954-688-72-4

Sommaire

Avant-propos

Ce guide pédagogique a été conçu pour aider les enseignants du collège dans leur tâche et pour leur permettre de mettre en œuvre les programmes marocains en langue française avec justesse et efficacité.

Le guide a été élaboré pour permettre à l'enseignant :

- D'organiser des situations d'apprentissage;
- D'utiliser le fichier de l'élève dans les meilleures conditions.

L'approche adoptée est l'enseignement par les situations problèmes et les activités favorisant ainsi l'action et la construction des savoirs par les apprenants eux-mêmes.

Le guide fournit des repères didactiques pour aider l'enseignant à conduire son action pédagogique avec le maximum d'efficacité. Il présente des outils permettant la mise en œuvre des situations d'apprentissage, que ce soient les situations de construction de nouvelles notions ou l'entrainement et le réinvestissement de ce qui est construit.

Ce guide pédagogique a été élaboré en s'appuyant sur les travaux des chercheurs en didactique des mathématiques et en psychologie cognitive, les orientations pédagogiques générales sur l'enseignement des mathématiques au cycle secondaire collégial au Maroc, les documents et les ressources d'accompagnement des programmes de mathématiques.

On trouve successivement dans ce guide :

- un exposé des conceptions de l'apprentissage et de l'enseignement fondant nos choix pédagogiques ;
- une analyse didactique fine des contenus du programme de première année du collège;
- les leçons du programme de la deuxième année collège avec des commentaires sur les activités de découverte et de construction, sur les exercices résolus qui visent des capacités méthodologiques en mathématiques et sur le cours et les exercices et problèmes d'application, d'entrainement et de réinvestissement.

Vue l'importance de l'évaluation formative, le guide donne aussi des indications sur le QCM au début de chaque leçon visant à diagnostiquer les prérequis chez les apprenants ainsi que sur le QCM de fin de leçon qui permet à l'élève de s'autoévaluer et de se rendre compte de ce qu'il a appris et des aspects de la leçon qui restent à approfondir ou à consolider.

1. Conception de l'apprentissage

Pendant longtemps les mathématiques étaient enseignées comme un ensemble de faits disparates, des règles, des formules ou des procédures à apprendre et à appliquer par imitation et à maitriser par entrainement intensif. C'est ainsi qu'on apprenait les nombres, les opérations arithmétiques, les techniques opératoires et les théorèmes de géométrie.

De ce fait, beaucoup d'élèves ne saisissaient pas le sens des notions qu'on leur inculquait. Quels liens entre addition et multiplication par exemple, pourquoi la technique de la division usuelle marchait…

On commençait alors à se poser la question sur les finalités et la méthodologie de l'enseignement des mathématiques. Quelle importance y a-t-il de faire apprendre aux élèves des savoirs figés. Ne saurait-il pas plus judicieux de développer chez la nouvelle génération de nos enfants des compétences et des démarches comme le raisonnement, la résolution de problèmes, la modélisation des situations concrètes, les attitudes critiques et la capacité d'évaluer, la communication, la créativité, les habiletés d'investigation et de questionnement…

De nouvelles perspectives pédagogiques et didactiques commençaient à se dessiner : ne pas se contenter de la mémorisation, de l'imprégnation et de l'entrainement répétitif ; mais mettre en avant d'autres démarches de pensée comme « chercher », « modéliser », « explorer », « communiquer », « évaluer », « raisonner »…Ce qui exige une autre façon d'enseigner.

De par le monde, depuis quelques années déjà, et sous l'impulsion des théories piagétiennes et des sciences cognitives, il y a consensus sur le fait que l'apprentissage (développement intellectuel et acquisition des savoirs) est de nature ***constructiviste***. L'acquisition des concepts est mieux assurée par des situations d'apprentissage de type adaptatif que par simple transmission ou entrainement répétitif et intensif.

Cela consiste à affirmer que l'on apprend essentiellement, non pas par simple imprégnation, ni par imitation passive ; mais à travers des ***actions finalisées menées dans le but d'apporter une réponse ou une solution à un problème à une tâche signifiante (c'est-à-dire que l'on s'est approprié) à laquelle le sujet fait face.***

C'est dans ce processus de résolution de problèmes que les **connaissances** sont construites, d'abord comme **outils** fonctionnels avant de devenir des **objets** de **savoirs** avec un statut reconnu (concepts, méthodes, techniques, formules…).A titre d'exemple, l'apprenant construit la notion de soustraction en traitant des situations où cette notion fonctionne, avant que la soustraction devienne une notion mathématique avec des techniques, un champ de validité...

APPRENDRE

Le processus d'apprentissage est actuellement éclairé par des apports divers.

1. Le constructivisme piagétien

Jean Piaget émet la théorie qu'un individu confronté à une situation donnée va mobiliser un certain nombre de structures cognitives, qu'il nomme schèmes. Celui qui apprend ne le fait pas seulement en relation avec les connaissances qu'il acquiert, mais il organise son monde au fur et à mesure qu'il apprend, en s'adaptant.

L'apprentissage consiste à entrer dans un processus actif de construction (plutôt que d'acquisition) de connaissances en interagissant avec son environnement, en donnant du sens à ses expériences et en développant ses représentations.

Le processus d'apprentissage constructiviste se déroule en trois étapes:

• L'assimilation : le processus d'assimilation se caractérise par l'intégration de nouvelles idées, analyses, notions à des cadres mentaux qui existent déjà. L'individu ajoute à sa structure cognitive des éléments provenant de son environnement, il les intègre en les reliant, en les coordonnant aux informations, aux connaissances dont il dispose déjà.

• L'accommodation : le processus d'accommodation est marqué par l'adaptation du sujet à des situations nouvelles, d'où modification de ses cadres mentaux et réorganisation de ses connaissances. C'est donc une action de l'environnement sur l'individu qui va avoir pour effet de provoquer des ajustements dans la manière de voir, de faire, de penser du sujet.

L'équilibration : On appelle équilibration (Piaget en parle en terme d'autorégulation) la recherche du meilleur équilibre entre les deux processus complémentaires, assimilation et accommodation, c'est-à-dire entre l'individu et son environnement.

2. Le socioconstructivisme

Faisant suite au courant constructiviste, le socioconstructivisme, développé par Lev Vygotski, intègre, comme son appellation l'indique, la dimension sociale. La perspective socioconstructiviste met l'accent sur le rôle des interactions sociales multiples dans la construction des savoirs et propose de considérer l'apprentissage comme une participation active à des activités en situation réelle et en interagissant avec d'autres.

L'approche socioconstructiviste repose sur les principes suivants :

• La tête de l'élève n'est jamais vide de connaissances.

• L'apprentissage ne se fait pas par empilement de connaissances, ni de manière linéaire.

• Les interactions sociales entre élèves peuvent aider à l'apprentissage.

• L'élève donne un sens à une connaissance si elle apparaît comme un outil indispensable pour résoudre un problème.

3. La psychologie cognitive

Le phénomène d'apprentissage est aussi éclairé par les apports de la psychologie cognitive. L'élève traite aussi les informations cognitives, il met les nouvelles informations en relation avec ses connaissances antérieures, choisit la stratégie la plus appropriée pour réussir la tâche… En effet, les cognitivistes considèrent que le sujet apprenant est un sujet actif et constructif qui acquiert, intègre et réutilise des connaissances. Ces connaissances se construisent graduellement.

Les principes fondamentaux de l'approche cognitive de l'apprentissage selon le professeur Jacques TARDIF (1992) sont les suivants :

- **l'apprentissage est un processus actif et constructif :** ici, l'élève est au cœur de l'apprentissage, il doit être actif et conscient de ce qui se passe à l'intérieur et à l'extérieur de lui. Il construit lui-même ses connaissances même si ces connaissances ne sont pas totalement correctes. Il les corrigera progressivement.
- **les connaissances antérieures exercent un rôle primordial dans l'apprentissage et les connaissances sont essentiellement cumulatives :** ce principe stipule que dans le processus d'acquisition et d'intégration de nouvelles connaissances, les connaissances antérieures stockées dans la mémoire à long terme déterminent non seulement ce que l'apprenant peut apprendre mais aussi ce qu'il apprendra effectivement et la façon dont les nouvelles connaissances seront apprises. C'est ainsi que le professeur Jacques Tardif (1992) affirme « L'apprentissage est l'établissement de liens entre les nouvelles informations et les connaissances antérieures. » De plus, l'apprentissage consiste en l'accumulation de connaissances. Les nouvelles informations s'associent aux anciennes soit pour les confirmer, soit pour s'y intégrer ou pour les nier.
- **l'apprentissage signifiant est étroitement lié à la représentation et à l'organisation des connaissances:** L'apprentissage requiert l'organisation constante des connaissances. Les connaissances doivent être bien organisées dans la structure cognitive de l'apprenant.
- **l'apprentissage est fondamentalement l'acquisition d'un répertoire de connaissances et de stratégies cognitives et métacognitives :** ici, les cognitivistes stipulent que le système cognitif de l'apprenant comporte des connaissances statiques, dynamiques et des stratégies cognitives et métacognitives qui lui permettent d'agir sur son environnement, d'utiliser les informations qu'il acquiert dans la résolution des problèmes. Il importe aussi de rendre l'élève conscient de ces stratégies, de leur économie et de leurs efficacités.
- **il existe des catégories de connaissances :** les connaissances déclaratives, les connaissances procédurales et les connaissances conditionnelles.
  - Les connaissances déclaratives correspondent aux connaissances théoriques ou qui sont reconnues comme savoirs au cours de l'évolution d'une société. Ces connaissances sont constituées de faits, de règles, de lois et de principes.
  - Les connaissances procédurales correspondent au comment faire, aux étapes d'une action, aux procédures, en fait ce sont les savoir-faire. Il faut savoir effectuer l'addition suivante 45+39 par exemple.

- Les connaissances conditionnelles font allusion au quand et au pourquoi. Elles correspondent aux classifications et aux catégorisations. On doit par exemple distinguer un carré d'un rectangle.

• La **métacognition** joue un rôle très important dans l'acquisition des connaissances : ici, la métacognition réfère à la connaissance ainsi qu'au contrôle que le sujet a sur lui-même et sur ses stratégies cognitives.il a une perception de l'importance de la tâche et des buts que l'enseignant poursuit et il est conscient du contrôle possible qu'il a sur sa réussite dans la réalisation de cette tâche. De plus il exige toujours de l'élève la gestion active de ses démarches cognitives et la gestion active de soi comme apprenant, c'est-à-dire de son investissement affectif dans la tâche.

4. Les travaux des didacticiens des mathématiques et notamment de G. Brousseau et de ses élèves.

Les apports de la didactique à la compréhension de l'acte d'apprendre et à l'organisation de l'enseignement des mathématiques sont importants. Sans aller en profondeur dans une présentation théorique, nous passons en revue les éléments suivants qui nous semblent fonctionnels et utiles pour les enseignants.

Apprentissage par adaptation

L'acquisition de connaissances passe par une interaction entre le sujet et l'objet d'études par le biais de résolutions de problèmes. La tête de l'élève n'est jamais vide de connaissances (conceptions) et l'apprentissage ne se fait pas par empilement de connaissances, ni de manière linéaire. L'élève ne donne un sens à une connaissance que si elle apparaît comme un outil indispensable pour résoudre un problème. Les interactions sociales entre élèves peuvent aider à l'apprentissage. Dans la conception de l'apprentissage adaptatif, l'erreur n'est pas à éviter. Elle est l'expression d'une forme de connaissance.

Transposition didactique des savoirs

Les savoirs à enseigner fixés par les programmes scolaires sont affiliés aux savoirs mathématiques élaborés par les mathématiciens et que l'on trouve dans les traités de mathématiques sous leur forme achevés (savoir savant).

Les savoirs savants désignés pour être enseignés (savoirs à enseigner)ne peuvent l'être tels quels, ils subissent des transformations pour être objet d'enseignement et d'apprentissage. L'une de ces transformations est la mise en situation qui s'apparente à une sorte de genèse artificielle. On parle ici de recontextualisation du savoir mathématique. Lorsqu'un élève résout de telles situations, il reconstruit des savoirs. Il y a repersonnalisation du savoir mathématique. Les connaissances ainsi produites en classe seront à nouveau décontextualisées et dépersonnalisées pour constituer les savoirs à retenir. Ces savoirs prendront leur place dans l'ensemble des savoirs antérieurs ou conduiront à les reconsidérer ou à les réaménager (décontextualisation et insitutionnalisation).

Ce travail de transformation des savoirs est appelé transposition didactique. L'un des roles de l'enseignant est d'opérer une transposition didactique pertinente des notions mathématiques à enseigner.

La situation problème

La situation problème joue un rôle central dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Au niveau de la fonction, elle est un moyen même de l'apprentissage, puisque c'est autour d'elle que va se nouer le dispositif didactique puisqu'elle est la source, le lieu et le critère de l'élaboration du savoir. La situation-problème a pour objectif, à l'opposé de celui du problème d'application, puisqu'il ne s'agit plus d'exercer et de renforcer les connaissances existantes, mais bien de découvrir le savoir à partir du problème, de lui donner du sens. Elle va permettre l'engagement de l'élève dans une résolution et qui va catalyser la genèse des instruments intellectuels, dont la construction se révélera nécessaire, chemin faisant.

La psychologie cognitive qui étudie les stratégies mentales des individus dans l'interprétation d'une situation donnée et la résolution de problèmes rencontrés affirme que les connaissances sont acquises selon un processus de résolution de problèmes mettant en oeuvre une dynamique de questionnement. Confronté à un obstacle, l'individu convoque ses connaissances et capacités pour sortir de l'impasse. Par l'exercice de ses potentialités, mais aussi par l'échange avec d'autres sur la complexité de la situation, il se construit de nouvelles compétences.

Les situations-problèmes sont des situations qui dans un premier temps, permettent à l'élève d'investir son ancien savoir. Dans un deuxième temps, permettent à l'élève de prendre conscience de l'insuffisance de ce savoir. Mais attention ! lui seul peut prendre conscience de l'insuffisance de ce savoir (inutile de le lui dire... !). Il faut donc que la situation donne la possibilité à l'élève de vérifier l'insuffisance de ses connaissances. Dans un troisième temps permettent à l'élève de construire de nouvelles procédures.

Les didacticiens, se basant sur ces théories (par exemple Douady Régine. 1986. Jeux de cadres et dialectique outil-objet, Recherches en didactique des mathématiques, vol. 7, no. 2.) donnent les caractéristiques d'une situation problème pour en faire un moyen didactique de construction de savoir chez les apprenants (sources : https://gpc-maths.org/data/images/situationpbdef.pdf) :

caractéristique	Commentaires
1. L'élève doit pouvoir s'engager dans la résolution du problème. L'élève peut envisager ce qu'est une réponse possible du problème.	**1)** Si non il ne mobilisera pas ses connaissances et ne pourra s'apercevoir qu'elles sont insuffisantes.
2. Les connaissances de l'élève sont en principe insuffisantes pour qu'il résolve immédiatement le problème.	**2)** Si non il n'y a pas d'acquisition nouvelle. Il y a réinvestissement des connaissances.

3. La situation-problème doit permettre à l'élève de décider si une solution trouvée est convenable ou pas.	**3)** Cette caractéristique est essentielle. En effet l'élève doit prendre conscience seul de l'insuffisance de ses connaissances. Cette insuffisance ne peut se constater que s'il est capable de constater tout seul que sa solution est fausse ou que sa méthode est trop lourde.
4. La connaissance que l'on désire voir acquérir par l'élève doit être l'outil le plus adapté pour la résolution du problème au niveau de l'élève.	**4)** Cette condition n'est pas facile à remplir. Une analyse à priori du problème est donc indispensable. Les données du problème, le matériel mis à disposition des élèves... sont autant de variables qui influenceront les stratégies des élèves. Ces variables sont appelées variables didactiques.
5. Le problème peut se formuler dans plusieurs cadres entre lesquels on peut établir des correspondances (par exemple cadre physique, cadre géométrique, cadre graphique).	**5)** Cette construction n'est souvent pas simple. Enfin il arrive que les élèves arrivent à percevoir l'insuffisance de leurs connaissances mais soient incapables de résoudre le problème. Ce blocage n'est pas tenable pour l'enseignant. Il ne peut qu'aider les élèves à construire une solution. Ne retombe-t-on pas alors dans une pratique behavioriste ? Il semble ici qu'il y ait une différence fondamentale avec le modèle behavioriste : ici l'élève prend conscience de l'insuffisance ses conceptions. Ce qui n'est pas le cas dans la pratique behavioriste.

Activité

Dans l'enseignement des mathématiques, on ne peut pas tout enseigner par des situations problèmes ayant les caractéristiques ci-dessus. On peut utiliser des activités.

Une activité est ce qui donne lieu à une activité mathématique de la part de l'élève, c'est la recherche d'un problème qui utilise et coordonne des notions apprises séparément ou encore un problème qui s'inscrit dans un processus d'apprentissage d'un «objet» mathématique. Une activité peut être définie par les caractéristiques suivantes :

1) L'élève peut engager une stratégie de son choix qui le conduit à des réponses au moins partielles au problème posé.

2) L'élève a besoin de convaincre ses interlocuteurs (autres élèves, professeur...) Il a les moyens de justifier ses réponses. Il est convaincu que cela fait partie de son contrat-élève.

3) L'énoncé laisse à l'élève la responsabilité du choix des «outils» et de la stratégie pour résoudre le problème.

4) Parmi les «outils» adaptés à la résolution du problème, «l'objet» mathématique visé est l'un des plus performants.

Le conflit cognitif

Dans une situation où les représentations d'un individu sont perçues par lui comme incompatibles avec une réalité objective, il y a confrontation entre ce qu'il croit connaître de la situation (sa représentation) et ce qu'il constate (la réalité). Ce constat oblige l'individu à déconstruire la représentation initiale pour en construire une nouvelle intégrant de nouvelles connaissances.

Le conflit sociocognitif

L'individu n'apprend pas seul mais en interaction avec d'autres : ses pairs, les enseignants, ses parents... Sur un même sujet, les représentations et les points de vue sont souvent très différents. Par cette confrontation à des points de vue qui dérangent les savoirs antérieurs, le conflit (qui n'est pas une querelle de personnes mais une confrontation des idées) oblige à se décentrer, écouter l'autre et complexifier sa vision du réel.

Enseignement par situation problèmes

Une situation problème est à construire avec soin et rigueur aussi bien dans les connaissances ou capacités visées que dans son déroulement. Son objectif est d'instaurer un déséquilibre, un conflit, une divergence entre ce que l'élève croit savoir du problème posé (ses représentations initiales) et ce qu'il constate dans la réalité. Ce déséquilibre (conflit cognitif) provoque un questionnement introspectif. L'énigme proposée par l'enseignant suppose une résolution qui transformera les représentations initiales par l'intégration de nouvelles compétences. Dans le cadre d'un travail collaboratif, la confrontation des idées et des différents points de vue fait évoluer les représentations de chaque élève du groupe de travail mais aussi les représentations majoritaires de la classe par l'acquisition de nouvelles connaissances et capacités. Mais la situation problème n'a de sens que si elle donne lieu à une production mutualisable (écrit, représentation graphique, rapide exposé...) et à un bilan réflexif sur ce qui a été abordé. Située en amont d'une démarche d'investigation ou de résolution de problème, elle permet de placer l'élève dans de bonnes conditions de réception en donnant du sens à l'activité d'apprentissage proposée.

Les types de situations de didactique et gestion d'une situation d'enseignement-apprentissage

Dans le cadre de la théorie des situations didactiques, le rôle de l'élève est de résoudre un problème. Le savoir est construit par l'élève. Le rôle de l'enseignant est d'organiser un milieu favorable pour l'apprentissage : choix de situations, organisation de travail en groupe, institutionnaliser. L'enseignant doit gérer la dévolution du problème à la classe (l'élève doit prendre la responsabilité du problème).

Le processus d'enseignement- apprentissage est fait de phases.

Phase d'action : appropriation du problème (connaissances anciennes)

Les élèves ne doivent pas seulement apprendre des définitions, des théorèmes et techniques, retenir les problèmes et les méthodes mises en oeuvre pour les résoudre. Ils doivent aussi devenir capables de s'emparer d'un problème complexe nouveau, de poser des questions, de discuter de la qualité des questions, de produire des réponses (des démarches, des formalisations, des preuves), et de discuter de leur pertinence.

La situation d'action pose à l'élève un problème dont la solution « optimale » (en termes d'effort, de temps, de fiabilité) dans les conditions proposées est à la connaissance à enseigner. Elle permet à l'élève d'investir ses stratégies et modèles implicites pour agir sur elle et lui renvoie de l'information sur son action. Elle lui permet aussi de juger le résultat de son action ; ajuster l'action sans intervention de l'enseignant.

Phase de formulation : formulation d'hypothèses

L'élève formule la solution trouvée, explicite son modèle implicite (modèle explicite : formulé à l'aide de signes, de règles communes, connues ou nouvelles) de manière à ce que cette formulation ait un sens, ce qui lui permet d'échanger de l'information : messages oraux/écrits, langage naïfs ou mathématiques avec d'autres élèves : émetteurs- récepteurs.

Phase de validation

L'élève doit se convaincre et convaincre les autres de la validité de la solution proposée (confrontation avec les autres, l'expérience). Il doit montrer pourquoi le modèle créé est valable, convaincre : argumentation, démonstration, réfutation ; et ce en proposant un message mathématique, modèle de la situation comme assertion à un interlocuteur, opposant (validation sémantique et syntaxique).

Phase d'institutionnalisation

Cette phase vise l'intégration de la nouvelle connaissance au patrimoine mathématique de la classe. L'enseignant fixe conventionnellement et explicitement le statut cognitif du savoir. Les connaissances changent de statut : la nouvelle connaissance est étiquetée savoir officiel, les élèves peuvent la retenir et l'appliquer.

Dans cette phase la notion étudiée passe du statut d'<u>outil</u> qu'elle avant dans la phase d'action au statut d'<u>objet</u>.

Phase d'entraînement et de réinvestissement

Des exercices d'entraînement, d'application et de réinvestissement complètent le processus. Dans cette phase devient un <u>outil explicite</u>.

Dévolution

Dans les situations didactiques, l'apprenant est amené à confronté un problème pour le résoudre à travers son action mathématique. Mais cette action, pour avoir du sens pour cet apprenant doit être autonome, c'est-à-dire que celui-ci doit agir sous l'impulsion du feed-back donné par le milieu et non par les directives de l'enseignant. La situation doit être a didactique. Ce transfert de la tâche de résolution complétement à l'apprenant est défini par G. Brousseau comme la dévolution du problème et qui est un « acte par lequel l'enseignant fait accepter à l'élève la responsabilité d'une situation d'apprentissage [...] et accepte lui-même les conséquences de ce transfert ».

En somme des apports du constructivisme, du socioconstructivisme, de la psychologie cognitive et de la didactique des mathématiques, nous retenons ce qui suit.

1. La résolution de problème : un moyen et une fin de la connaissance

La résolution de problèmes joue un rôle essentiel dans l'activité mathématique. Elle est présente dans tous les domaines et s'exerce à tous les stades des apprentissages. La maîtrise des principaux éléments de mathématiques s'acquiert et s'exerce essentiellement par la résolution de problèmes, notamment à partir de situations proches de la réalité.

2. Le processus d'apprentissage : un processus d'interaction ancien/ nouveau avec un rôle constructif de l'erreur

Dans la perspective constructiviste, les acquis ne s'accumulent pas, mais le nouveau s'intègre à l'ancien et conduit à certaines adaptations de ce dernier.

A titre d'exemple, l'apprentissage des nombres décimaux comme savoir nouveau se réalise en interaction avec les acquis concernant les nombres entiers. L'introduction de ces nouveaux nombres remet en question certaines conceptions comme entre deux nombres entiers il n'y pas d'autres nombres », « le produit de deux nombres est supérieur aux deux nombres »,

Dans ce cadre, les apprenants commettent des erreurs car ils appliquent des savoirs hors de leur champ de validité. Les contradictions qui en résultent conduisent à des déséquilibres cognitifs que l'apprenant tentera de dépasser pour retrouver un nouvel équilibre.

Les erreurs jouent ainsi un rôle moteur dans la construction des savoirs. Elles sont positives et sources d'apprentissage. Elles sont normales dans le processus d'apprentissage car elles expriment à la fois la représentation mentale que l'élève se fait d'une notion ou d'une action et un obstacle à repérer avant de le dépasser.Gaston Bachelard (philosophe des sciences) disait: « On connaît contre une connaissance antérieure, en détruisant les connaissances mal faites, en surmontant ce qui,dans l'esprit même, fait obstacle ».

L'apprentissage se déclenche lorsqu'un signal d'erreur montre que la prédiction générée par notre cerveau n'est pas parfaite. Il ne peut pas exister d'apprentissage quand tout est parfaitement prévisible.

- L'erreur ou l'incertitude sont normales – elles sont même indispensables.
- Les punitions face aux erreurs ne font qu'augmenter la peur, le stress, et le sentiment d'impuissance inutilement. Les punitions sont néfastes aux apprentissages.
- La motivation positive et les encouragements stimulent l'apprentissage. Les meilleurs encouragements résident dans le regard des autres et la conscience de progresser, ils ne sont pas synonymes de récompenses.

3. Le processus d'enseignement-apprentissage est essentiellement un processus de traitement de l'information.

L'apprentissage est un processus actif et constructif, les connaissances antérieures exercent un rôle primordial dans l'apprentissage qui est fondamentalement l'acquisition d'un répertoire de connaissances et de stratégies cognitives et métacognitives.

La métacognition joue un rôle très important dans l'acquisition des connaissances. Elle réfère à la connaissance ainsi qu'au contrôle que le sujet a sur lui-même et sur ses stratégies cognitives, et aussi à la gestion active de ses démarches cognitives et la gestion active de soi comme apprenant, c'est-à-dire de son investissement affectif dans la tâche.

4. Le sens et l'automatisme : nécessité de comprendre et de s'exercer

L'apprentissage des mathématiques doit assurer un **équilibre entre la compréhension et les mécanismes.**

«Une appropriation mathématique pour un élève ne saurait se limiter à la connaissance formelle de définitions, de résultats, de techniques et de démonstrations, il est indispensable que les connaissances aient pris du sens pour lui à partir de questions qu'il s'est posées et qu'il sache les mobiliser pour résoudre des problèmes».

Il est nécessaire de créer aussi tôt que possible à l'école primaire des automatismes en calcul. Il faut aussi comprendre des concepts et des techniques (calcul, algorithme) et les mémoriser afin d'être en mesure de les utiliser. Mais l'acquisition des mécanismes en mathématiques est toujours associée à une intelligence de leur signification.

5. Le langage et les interactions sociales : vecteurs de la connaissance

Les interactions sociales entre élèves peuvent aider à l'apprentissage. Le sens des savoirs se construit à travers une « négociation sociale » des différents points de vue. A cet égard le langage est un vecteur primordial.

Les éléments exposés ci-avant fondent nos choix pédagogiques et son l'objet de la partie « ENSEIGNER » ci-après.

2. Modèle didactique adopté

La conception constructiviste de l'apprentissage, lorsqu'elle est adoptée comme arrière- plan du modèle pédagogique amène à des approches didactiques et des méthodes pédagogiques qui favorisent l'activité des élèves et prennent comme entrée à l'apprentissage les situations problèmes. Dès lors, l'approche transmissive ou behavioriste ne sauraient constituer le fond sur travail d'enseignement.

Les principes pédagogiques généraux du constructivisme :

a. Les apprenants « construisent » leur propre connaissance à partir des notions qu'ils possèdent déjà et de leur expérience.

b. On met l'accent sur la réalisation d'activités d'apprentissage authentiques ou en contexte, c'est-à-dire en prenant part à des situations susceptibles de se dérouler dans la vie de tous les jours.

c. On met l'accent sur l'apprenant plutôt que sur l'enseignant. Elle encourage cet apprenant à construire ses propres conceptualisations et à apporter ses solutions aux problèmes qu'il rencontre, elle l'incite même à développer au maximum son autonomie et son initiative.

d. l'apprentissage est basé sur la participation active des élèves à la résolution de problèmes et à la pensée critique en regard de la tâche qu'ils doivent réaliser. L'individu est donc le protagoniste actif du processus de connaissance, et les constructions mentales qui en résultent sont le produit de son activité. Dans cette optique, apprendre ne consiste pas à recevoir le savoir d'une manière passive, mais à agir sur les informations reçues de la situation en les transformant.

e. L'enseignant devient un facilitateur, un « accompagnateur » qui guide l'élève et le pousse à utiliser son esprit critique, à résoudre des problèmes et à synthétiser ses connaissances. Dans cette perspective, l'enseignant ne doit pas entraver le processus de développement interne de l'élève (l'enseignement doit s'adapter aux besoins des élèves). Il lui revient de fournir à ses élèves un environnement d'apprentissage ouvert, riche de possibilités d'apprentissage, et surtout non-fondé sur des séquences d'instruction prédéterminées.

Les principes pédagogiques généraux du socioconstructivisme :

1. L'apprentissage est considéré comme le produit d'activités sociocognitives liées aux échanges didactiques enseignant-élèves et élèves – élèves. Ceci peut se réaliser par exemple dans des travaux de groupe, des stages de terrain, un enseignement réciproque (entre étudiants), des collaborations à distance en recourant à l'usage des technologies, des simulations (l'utilisation du courrier électronique dans le cadre d'une correspondance scolaire ou encore le travail au sein de classes virtuelles). L'enseignant et les élèves évaluent les constructions réalisées en termes de produits en faisant appel, par exemple, au portfolio.

2. La conception constructiviste de l'apprentissage se base sur la production d'un conflit sociocognitif par confrontation d'un apprenant à une situation problème, d'où un effet de déstabilisation susceptible de provoquer une réorganisation de connaissances ou l'acquisition de nouveaux savoirs et savoir-faire.

3. L'enseignant doit favoriser une construction en commun de la connaissance, fondée sur la négociation et la coopération entre pairs. Le groupe d'élèves est même convié à évaluer les prestations de chacun de ses membres. L'enseignant amène l'élève à réfléchir sur son processus d'apprentissage et à comparer ses constructions avec celles des pairs.

4. Cette approche encourage chez l'apprenant la curiosité, l'initiative et la recherche. L'élève est invité à résoudre un problème ou à réaliser une activité en faisant appel aux ressources humaines et matérielles auxquelles il a accès : collègues, expériences antérieures. La motivation à l'acquisition est démultipliée par le fait d'avoir à gérer des relations sociales: rapports conflictuels, par exemple, dont la résolution va de pair avec la résolution du problème cognitif. C'est alors que, par essai et erreur, l'élève en question sera en mesure de comparer les conceptions qu'il possède déjà avec ses nouvelles expériences en parvenant ainsi à un nouveau palier de connaissances. En clair, l'élève est responsable de ses apprentissages, il « apprend à apprendre ».

Les principes généraux retenus du cognitivisme sont reliés aux facteurs qui déterminent la vitesse et la facilité d'apprentissage, à savoir:

- L'attention
- L'engagement actif - importance de l'évaluation et de la métacognition
- Le retour d'information - signaux d'erreurs - motivation et récompense
- La consolidation - L'automatisation: transfert du conscient au non-conscient, et libération de ressources.

Les principes généraux de la didactique des mathématiques :

- L'enseignement par les situations problèmes et les activités où l'action des élèves et la résolution des problèmes jouent un rôle fondamental
- L'enseignant a pour rôle central non la transmission de savoirs achevés, mais d'organiser l'environnement d'apprentissage et de gérer les situations didactiques de façon à préserver le sens des savoirs mathématiques traités (dévolution)
- La dialectique outil/objet permet d'investir les conceptions et les stratégies initiales des apprenants (outils implicites) pour aboutir à des objets mathématiques institutionnalisés et de nouveaux outils explicites
- Les erreurs ne sont pas l'effet de l'étourderie ou de manque de connaissances mais l'indice d'un savoir appliqué hors de son champ de validité ou des conceptions erronées.

De ces principes constructivistes, socioconstructivistes,cognitivistes et didactiques découlent les orientations didactiques suivantes.

Favoriser la construction des savoirs en proposant des situations d'investigation et de résolution de problèmes

L'élève doit être acteur de ses apprentissages, il est important de le mettre en face de situations où il doit avoir une activité de recherche. L'accent doit être mis sur les différentes démarches possibles qu'utilisent les élèves pour résoudre une situation, ce qui nécessite des échanges sur les procédures mobilisées afin d'introduire une nouvelle notion, une procédure « experte », un calcul spécifique, un nouvel outil mathématique.

La résolution de problèmes est la base de tous les apprentissages en mathématiques. Elle fait l'objet d'un apprentissage progressif et contribue à construire le sens des opérations ». De ce fait elle est naturellement présente et intégrée à la plupart des activités.

Les approches privilégiées sont celles qui donnent un sens aux apprentissages via des situations d'apprentissage par adaptation

L'environnement d'apprentissage doit permettre aux élèves d'élaborer, par adaptations successives, des stratégies de résolution du problème qui conduisent à l'apprentissage visé. Les élèves apprennent à expliciter progressivement leurs procédures. Les échanges entre les élèves ainsi qu'un étayage approprié du professeur contribuent à l'apprentissage de chacun.

Les situations d'enseignement doivent permettre **l'interaction** et la **collaboration** entre les élèves, expérience décisive dans la construction des savoirs. Dans ce contexte l'élève travaille dans une atmosphère de socialisation où les talents de chacun sont reconnus. L'élève un acteur **responsable** dans la réalisation de ses apprentissages et l'apprentissage doit se faire en **profondeur**, en se basant sur la réflexion, plutôt que sur une étude superficielle des connaissances fondée sur la mémorisation. L'enseignement touche donc les savoirs, les savoir-faire, les savoir-être et les stratégies d'apprentissage et doit doter l'élève de **confiance** en ses habiletés afin qu'il s'investisse pleinement dans une démarche personnelle qui lui permettra d'atteindre un haut niveau de compétence.

L'élève doit développer le goût de **l'effort intellectuel** avec ce que cela exige d'imagination et de créativité d'une part, d'esprit critique et de rigueur d'autre part, ces exigences étant adaptées en fonction de son avancement.

L'enseignant prépare son enseignement/ses leçons en centrant son attention et ses efforts sur deux aspects :

- Quelles situations-problèmes et activités proposer pour construire les notions à enseigner ;
- Quelle gestion des situations didactiques en classe qui favorise l'action des élèves (manipulation, résolution de problèmes, interaction entre les élèves);
- Quelle régulation des apprentissages (diagnostic, évaluation formative, feed-back…).

L'apprentissage de chaque notion est de nature « spiralaire » et non linéaire

Il se déroule par approfondissements et élargissements successifs, souvent sur plusieurs périodes pendant lesquelles alternent phases de construction ou d'appropriation, moments de structuration, phases d'entraînement et de consolidation. La progression sur une année prend en compte cet aspect.

ENSEIGNER

Le processus d'enseignement apprentissage

Adossé aux conceptions constructiviste, socioconstructiviste et cognitiviste de l'apprentissage et à un modèle pédagogique de l'enseignement des mathématiques cohérents avec ces conceptions, nous présentons le processus d'enseignement- apprentissage des mathématiques au collège centré sur les situations didactiques, la résolution des problèmes, les activités.

Ce processus se démarque nettement de l'approche transmissive qui consiste à procéder par le schéma classique ; « j'apprends- j'applique- je comprends » où les élèves reçoivent les savoirs sous leur forme achevés (définitions, théorèmes et leurs démonstrations et exemples) puis exercices pour appliquer ce qu'ils ont reçu, s'entrainer pour comprendre le sens des notions étudiées.

Il consiste au contraire à susciter l'action des apprenants via des problèmes ou des activités construites ou créés par l'enseignants pour amener ces apprenants à construire le savoir visé par la leçon.

Les notions se construisent le plus souvent possible, comme des réponses à des questions qui présentent un certain enjeu pour les élèves. Dans ces « situations d'apprentissage », les élèves développent, pour les résoudre, une réelle activité cognitive de nature mathématique qui contribue à donner du sens à la notion.

En se référant à la **théorie des situations didactiques** de Guy Brousseau, on conçoit le processus d'enseignement-apprentissage selon les phases suivantes.

□ La phase de recherche

Au cours de cette phase, l'enseignant laisse les élèves chercher en s'assurant qu'ils ont bien compris ce qui leur est demandé. Son rôle est alors très important. Il consiste à solliciter les élèves, à veiller à ce qu'ils se sentent concernés, à relancer la recherche. Il consiste aussi à recueillir des informations sur les procédures des élèves qu'il est en train d'observer et éventuellement à les prendre en note. Ces informations lui permettent d'avoir une meilleure connaissance des compétences de ses élèves et d'organiser ainsi plus facilement la phase de mise en commun.

□ La phase de mise en commun ou la «correction»

Après un certain temps de recherche, les élèves doivent être informés sur la validité du travail qu'ils ont effectué. Une mise en commun des productions des élèves est nécessaire.

Pour que ces moments puissent fonctionner, l'enseignant doit veiller, dès le début de l'année, à mettre en place la communication entre l'élève qui fait sa proposition et le groupe classe. Cela nécessite beaucoup d'attention, d'implication et d'écoute de la part de tous. Les élèves doivent apprendre à argumenter lorsqu'on leur pose la question « Pourquoi... ? » sans craindre d'avoir fait une erreur, à considérer les erreurs non comme des « fautes » mais comme des propositions qui ne sont pas valides, à respecter les arguments de leurs camarades.

□ La phase de l'institutionnalisation

Pour que les connaissances construites par ce travail de confrontation à des situations d'apprentissage puissent devenir des savoirs partagés, les moments où le professeur officialise certains éléments sont fondamentaux. Ces moments sont collectifs : le professeur formule ce qui a été découvert, ce que l'on a appris. Avant de pouvoir être évaluées, les connaissances doivent faire l'objet d'une longue phase d'entraînement, pour que les élèves puissent se les approprier et les mobiliser spontanément dans de nouveaux contextes. Chaque étape comporte des exercices ayant cette fonction d'entraînement.

□ L'évaluation des connaissances des élèves

L'évaluation est avant tout un outil permettant au professeur de réguler son enseignement au jour le jour et tout au long de l'année. Cette évaluation des compétences se fait, en cours d'apprentissage, lorsque le professeur observe chaque élève devant une tâche. L'évaluation se fait également au travers d'activités spécifiques permettant à l'enseignant d'évaluer les performances des élèves à un moment donné sur un sujet précis.

Jalons de nos choix pédagogiques

La Collection «l'Univers des Maths » a été conçue dans une**optique socioconstructiviste et cognitiviste de l'apprentissage et e l'enseignement** : L'enfant développe ses connaissances à travers son activité sur son environnement. C'est une activité sociale dont le langage est le médiateur principal. L'échange avec les pairs d'une part, le rôle de l'adulte d'autre part, prennent une part déterminante dans le processus d'apprentissage. Les méthodes pédagogiques que nous proposons reposent sur les principes constructivistes, socioconstructivistes et cognitivistes présentés ci-avant.

Faire des mathématiques, c'est résoudre des problèmes : l'enfant construit ses connaissances face à des situations qui lui imposent d'élaborer et de verbaliser les images mentales, les outils et les concepts logiques et mathématiques.

Enseigner des mathématiques c'est aménager d'un **environnement d'apprentissage autour de situations problèmes et d'activités** et gérer cet environnement da manière à ce que les **élèves cherchent, collaborent, échangent de façon autonome.**

Analyse didactique du programme des mathématiques en 2èmeannée du collège

Cette partie fournit à l'enseignant des repères didactiques quant aux contenus mathématiques traités en deuxième année du collège, les principaux objectifs poursuivis et des indications sur le traitement de ces contenus pour atteindre ces objectifs.Cette analyse est structurée par domaine et par leçons.

Mais de prime abord, précisons que, l'enseignant doit prendre conscience du fait que,de façon transversale, les mathématiques sont un puissant outil et un langage universel permettant de décrire et de modéliser les phénomènes de la nature mais elles s'en distinguent aussi car elles forment une discipline intellectuelle autonome, possédant son identité.

Le rôle de la preuve, établie par le raisonnement, est essentiel et l'on ne saurait se limiter à vérifier sur des exemples la vérité des faits mathématiques. L'enseignement des mathématiques conduit à goûter le plaisir de découvrir par soi-même cette vérité, établie rationnellement et non sur un argument d'autorité, et à la respecter.

Faire des mathématiques, c'est se les approprier par l'imagination, la recherche, le tâtonnement et la résolution de problèmes, dans la rigueur de la logique et le plaisir de la découverte.

Les programmes officiels précisent que l'enseignement des mathématiques au collège vise à développer chez les élèves des compétences transversales et des attitudes, en plus des compétences disciplinaires.

– La résolution de problèmes : résoudre des problèmes lui permettant d'appliquer les nouvelles notions mathématiques et d'établir des liens entre elles;

– La communication : communiquer mathématiquement de façon appropriée; – Le raisonnement : raisonner et justifier son raisonnement;

– Les liens : créer des liens entre les idées et les concepts mathématiques, la vie quotidienne et d'autres disciplines;

– L'estimation et le calcul mental : utiliser au besoin l'estimation et le calcul mental;

– La technologie : choisir et utiliser l'outil technologique approprié à la résolution de problèmes.

- Des attitudes positives vis-à-vis des mathématiques qui génèrent en l'apprenant la capacité de faire des mathématiques et lui prennent conscience de l'importance des mathématiques dans le développement personnel et social, et ce à travers ;

- Le développement de la confiance en soi dans le domaine des mathématiques et le développement d'attitudes positives envers cette discipline ;

- L'appréciation des aspects artistiques dans les mathématiques (les patterns, la symétrie, le pavage) ;

- L'appréciation du rôle des mathématiques dans le progrès scientifique et social.

L'apprentissage des mathématiques développe l'imagination, la rigueur et la précision ainsi que le goût du raisonnement. La résolution de problèmes fait l'objet d'un apprentissage progressif et contribue à construire le sens des notions étudiées. Les attitudes visées à travers l'apprentissage des mathématiques sont essentiellement :

- la rigueur et la précision dans les tracés, dans les mesures, dans les calculs ;
- le goût du raisonnement ;
- le réflexe de contrôler la vraisemblance des résultats ;
- la volonté de justesse dans l'expression écrite et orale ;
- l'ouverture à la communication, au dialogue, au débat ;
- l'envie de prendre des initiatives, d'anticiper ;
- la curiosité et la créativité ;
- la motivation et la détermination dans la réalisation d'objectifs.

Deuxième année du collège : une marche vers les mathématiques déductives.

La deuxième année du collège a constitué une étape décisive dans le parcours scolaire des élèves, tant du point de vue de l'environnement d'apprentissage (pluralité des disciplines et des enseignants…) que du niveau des savoirs étudiés. En deuxième année la marche vers des mathématiques où prédomine la démarche algébrique, le raisonnement déductif, la géométrie théorique (vs expérimentale) est plus marquée.

Dès lors, les élèves doivent prendre conscience du fait que résoudre un problème ne revient pas à trouver, tout de suite, les calculs à effectuer pour répondre à la question posée. Une élaboration est, en général, nécessaire, faite d'étapes ou d'essais plus ou moins organisés. Un même problème, suivant le moment où on le propose, suivant les connaissances des élèves à qui on le destine et suivant la gestion qui en est faite, peut être résolu par élaboration de procédures personnelles ou par reconnaissance et utilisation d'une procédure experte appropriée. Dans certains cas, la résolution des problèmes est organisée par l'enseignant pour, à partir des solutions personnelles élaborées par les élèves, déboucher sur une nouvelle connaissance (notion, procédure).

Le programme de deuxième année reprend, pour les consolider, des notions du domaine des nombres étudiées en première année, comme les nombres décimaux, les fractions et les nombres relatifs, les équations. De nouvelles notions sont abordées : dans le domaine des nombres, les nombres rationnels ; en géométrie plane la symétrie axiale, les vecteurs et la translation ; et en géométrie dans l'espace la pyramide et le cône de révolution.

Dans ce qui suit nous présentons une analyse fine des contenus traités en deuxième année du collège.

1. NOMBRES ET CALCUL

Les nombres sont au début et au cœur de l'activité mathématique. L'acquisition des principes de base de la numération, l'apprentissage des opérations et de leur sens, leur mobilisation pour des mesures et pour la résolution de problèmes s'est opérée à l'école primaire. Elle est poursuivie au collège avec des degrés croissants de complexité – nombre entiers naturels, nombres décimaux, fractions, nombres relatifs. L'apprentissage des techniques opératoires s'enrichit par des apprentissages de nature algébrique (calcul littéral, développement et factorisation, équations…).

Les notions relatives aux nombres et aux opérations doivent être introduites et mises en fonctionnement à travers des problèmes associant à une situation donnée une activité numérique. Ce qui permet de renforcer le sens des opérations et des diverses écritures numériques et littérales. Ils sont principalement issus de la vie courante, des autres disciplines ou des mathématiques. Il convient de ne pas multiplier les activités purement techniques. Tous les travaux numériques fournissent des occasions de pratiquer le calcul exact ou approché sous toutes ses formes, utilisées en interaction : calcul mental, à la main ou instrumenté.

La résolution de problèmes a pour objectifs :

- d'entretenir et développer la pratique du calcul mental, du calcul à la main et l'utilisation raisonnée des calculatrices ;
- d'assurer la maîtrise des calculs d'expressions numériques sur les nombres décimaux positifs et prévoir l'ordre de grandeur d'un résultat ;
- d'initier aux nombres relatifs et aux calculs sur les nombres en écriture fractionnaire ; de familiariser les élèves aux raisonnements conduisant à des expressions littérales ;
- d'apprendre à choisir et interpréter l'écriture appropriée d'un nombre ou d'une expression littérale suivant la situation,
- d'apprendre à effectuer des transformations simples d'écriture ;
- d'initier à la notion d'équation.

Dans la Collection « Univers des Maths», les leçons concernant le domaine «Nombres et calcul», programmés en deuxième année du collège sont les suivantes.

2. DOMAINE DE LA GEOMETRIE

Au début du primaire, l'élève a travaillé sur une géométrie de la perception, partant de l'espace ambiant pour décrire et reproduire des figures planes usuelles, et contrôler leurs propriétés par les sens. Dans les dernières années de ce cycle, l'élève s'est progressivement orienté vers une géométrie où les propriétés des objets sont contrôlées par le recours à des instruments, puis par l'explicitation de ces propriétés. Il a appris à nommer, comparer, reconnaître, décrire, des figures simples ou d'autres plus complexes, telles que : triangles et triangles particuliers (rectangle, isocèle, équilatéral), quadrilatères et quadrilatères particuliers (carré, rectangle, losange), cercle. Il s'est entraîné à reproduire, représenter, construire des figures simples et des configurations planes plus élaborées, à réaliser ou à rédiger un programme de construction. Il a identifié des relations entre objets géométriques et des propriétés de ces objets en mettant en place un vocabulaire adéquat (polygone, côté, sommet, angle, segment, cercle, rayon, diamètre, milieu, médiatrice, hauteur, etc.). L'élève a appris à effectuer des tracés et des constructions correspondant à certaines relations (perpendicularité, parallélisme, égalité de longueurs ou de mesures d'angles, figures symétriques par rapport à un axe de symétrie, symétriques d'une droite, d'un segment, d'un point, médiatrice d'un segment, agrandissement ou réduction). Pour ces constructions, il a utilisé des instruments usuels de tracé (règle graduée, équerre, compas), des supports variés (papier uni, quadrillé ou pointé, calque, gabarits d'angles, bandes de papier), et s'est initié à l'usage de logiciels (géométrie dynamique, initiation à la programmation, visualisation de cartes, de plans).

Au collège, l'élève s'appuie toujours sur une géométrie perçue par les sens et contrôlée par les instruments, mais s'oriente progressivement vers une géométrie où les propriétés des objets sont validées par le raisonnement. Il poursuit et enrichit sa connaissance des figures et configurations clés (triangles, quadrilatères, cercles), et de leurs propriétés géométriques et métriques.

L'élève entretient sa pratique des problèmes de construction à l'aide des instruments de tracé. Les frises, rosaces et pavages sont un terrain fertile pour utiliser ces outils, en liaison avec les transformations de figures. Le repérage sur la droite est introduit en liaison avec les nombres relatifs. Les tracés à la main levée ont toute leur importance, que ce soit pour chercher des conditions nécessaires dans les problèmes de construction, ou pour conduire des raisonnements. Le repérage dans le plan à l'aide des coordonnées cartésiennes est relié aux représentations graphiques (organisation de données, proportionnalité).

Le vocabulaire lié aux objets et notions géométriques (médiatrice, hauteur, inégalité triangulaire relève de l'utilisation d'un langage mathématique adapté. Le codage des figures est lui-même une autre forme de langage mathématique.

L'écriture d'un protocole est une méthode efficace pour comprendre ou réaliser une construction. La démonstration est perçue et utilisée comme une démarche mathématique permettant de prouver un énoncé ou un résultat général. La modélisation en géométrie plane est une façon de représenter le monde.

La pratique des figures usuelles et de leurs propriétés, entamée au primaire est poursuivie et enrichie.

Du primaire au collège, le contrôle des propriétés géométriques passe de la perception au dessin, puis à une géométrie plus abstraite, contrôlée par le raisonnement, qu'il soit formalisé ou non par une démonstration écrite.

Pour passer de la géométrie perçue à la géométrie abstraite, le changement de paradigme doit être motivé par des activités qui en montrent la nécessité. Par exemple, le recours à une propriété caractéristique peut être motivé par une figure codée, un programme de construction téléphoné, le jeu du portrait, … ; l'emploi d'une argumentation raisonnée peut l'être en réponse à une question du type « le triangle est-il à peu près rectangle, ou exactement ? », par un raisonnement à partir d'une figure à main levée ; etc.

Problèmes de construction

Les problèmes de construction constituent un champ privilégié de l'activité géométrique. Ces problèmes doivent être diversifiés : reproduction d'une figure, figures sous contrainte, protocoles ou algorithmes de construction, analyse et modélisation de situations complexes issues du monde réel, des arts visuels, de l'architecture, du design, etc. Ces problèmes développent l'aptitude à observer une figure et à la représenter dans le modèle géométrique abstrait pour y raisonner.

L'élève doit entretenir et consolider sa compétence dans la manipulation des instruments de tracé et de mesure, et se familiariser progressivement avec les fonctionnalités d'un logiciel de géométrie dynamique permettant des constructions. Pour certaines figures relevant d'une procédure algorithmique, un logiciel adapté peut être utilisé.

La géométrie doit rester en prise avec le monde sensible qu'elle permet de décrire. Les constructions géométriques, avec leurs instruments traditionnels – règle, équerre, compas, rapporteur –, aussi bien qu'avec un logiciel de géométrie, constituent une étape essentielle à la compréhension des situations géométriques. Mais la géométrie est aussi le domaine de l'argumentation et du raisonnement, elle permet le développement des qualités de logique et de rigueur.

L'étude de la symétrie centrale et de la symétrie axiale permet de réorganiser et de compléter les connaissances sur les figures. Les travaux de géométrie plane prennent toujours appui sur des figures dessinées, suivant les cas, à main levée, à l'aide des instruments de dessin et de mesure, ou dans un environnement informatique. Ils sont conduits en liaison étroite avec l'étude des autres rubriques. Les diverses activités de géométrie habituent les élèves à expérimenter et à conjecturer, et permettent progressivement de s'entraîner à des justifications mettant en œuvre les outils du programme et ceux déjà acquis en classe de sixième.

La résolution de problèmes a pour objectifs de connaître et utiliser les propriétés conservées par symétrie (axiale ou centrale), les propriétés relatives aux figures usuelles (triangles, parallélogrammes, cercles), d'entretenir la pratique des constructions géométriques (aux instruments et à l'aide d'un logiciel de géométrie) et des raisonnements sous-jacents qu'elles mobilisent, de conduire sans formalisme des raisonnements géométriques simples, de familiariser les élèves avec les représentations de figures de l'espace.

Dans la Collection « Univers des Maths », les leçons concernant le domaine « Géométrie», programmés en deuxième année du collège sont les suivantes.

Leçon 1 : Nombres relatifs (révision)

Les nombres relatifs sont utilisés pour décrire des situations dans lesquelles il y a besoin de définir un référentiel où un point-repère par rapport auquel se situent les autres points. C'est de là que vient le terme «relatif». On définit le «négatif» par ce qui vient avant le point-référent et le «positif» ce qui vient après. Pour la température par exemple il y a le 0, la température au-dessous de 0 est négative, ce qui est dessus de 0 est positif.

La notion de nombre relatif est introduite à partir d'un problème qui en montre la nécessité (par exemple pour rendre la soustraction toujours possible). Une relation est faite avec la possibilité de graduer entièrement la droite, puis de repérer le plan. Les nombres utilisés sont aussi bien entiers que décimaux.

Les objectifs poursuivis dans cette leçon sont afférents à l'ordre, à l'addition et la soustraction de nombres relatifs. A l'utilisation de la notion d'opposé. Les élèves doivent savoir ranger des nombres relatifs courants en écriture décimale, calculer la somme ou la différence de deux nombres relatifs, calculer, sur des exemples numériques, une expression dans laquelle interviennent uniquement les signes +, – et éventuellement des parenthèses, sur des exemples numériques, écrire en utilisant correctement des parenthèses, un programme de calcul portant sur des sommes ou des différences de nombres relatifs.

Les objectifs d'apprentissage sont :

- Connaître les règles d'addition et de soustraction des nombres relatifs ;
- Savoir additionner et soustraire des nombres relatifs ;
- Connaître les règles de multiplication et de division des nombres relatifs : connaître la règle des signes et les priorités de calcul ;
- Savoir calculer le produit et le quotient des nombres relatifs,
- Savoir calculer des expressions contenant des nombres relatifs.

Leçon 2 : Nombres rationnels : Introduction et comparaison

Les nombres rationnels sont une généralisation des fractions étudiées au primaire et en première année du collège. L'objet de cette leçon est de développer chez les élèves la maîtrise des nombres rationnels et de les manipuler dans les calculs et la résolution des problèmes.

Les objectifs d'apprentissage sont :

- Calculer l'inverse d'un nombre décimal relatif non nul ;
- Connaître les nombres rationnels ;
- Déterminer le signe d'un nombre rationnel ;
- Utiliser l'équivalence entre deux nombres rationnels égaux et produits en croix égaux ;
- Transformer, simplifier un nombre rationnel ;
- Réduire au même dénominateur deux nombres rationnels ;
- Comparer deux nombres rationnels en écriture décimale ou fractionnaire.

Leçon 3 : Nombres rationnels : Somme et différence

L'opération d'addition et de soustraction des nombres rationnels sont deux notions fondamentales mettant en œuvre la réduction au même dénominateur des nombres en jeu.

Les objectifs d'apprentissage sont :

- Connaître les règles d'addition et de soustraction des nombres rationnels ;
- Savoir additionner des nombres rationnels dont les dénominateurs sont les mêmes ;
- Savoir additionner des nombres rationnels dont les dénominateurs sont différents ;
- Savoir soustraire des nombres rationnels dont les dénominateurs sont les mêmes ;
- Savoir soustraire des nombres rationnels dont les dénominateurs sont différents.

Leçon 4 : Nombres rationnels : Produit et division

Comme l'addition et la soustraction, la multiplication et la division des nombres rationnels sont deux notions de première importance. Une erreur souvent commise par les élèves est de rendre au même dénominateur les deux nombres rationnels à multiplier. Les élèves ont aussi une difficulté à multiplier un nombre rationnel par un entier ne concevant pas ce dernier comme un nombre rationnel de dénominateur 1.La division est aussi une opération délicate mettant en jeu l'inverse d'une fraction.

Les objectifs d'apprentissage sont :

- Connaître les règles de multiplication et de division des nombres rationnels ;
- Savoir multiplier des nombres rationnels ;
- Savoir diviser des nombres rationnels ;
- Déterminer le signe du produit et du quotient de deux nombres rationnels.

Leçon 5 : Puissances d'un nombre rationnel

En première année du collège, les élèves ont étudié la puissance des nombres relatifs. Cette leçon vise à ce que les élèves acquièrent la notion de puissance d'un nombre rationnel.

L'utilisation des propriétés est prioritaire. Les élèves doivent aussi connaître l'écriture scientifique des nombres.

Les objectifs d'apprentissage sont :

- Connaître et utiliser la puissance positive d'un nombre relatif ;
- Connaître et utiliser la puissance négative d'un nombre relatif ;
- Connaître et utiliser la puissance positive d'un nombre rationnel ;
- Connaître et utiliser la puissance négative d'un nombre rationnel ;
- Connaître et utiliser l'écriture scientifique.

Leçon 6 : Symétrie axiale

En première année du collège, a été abordée la notion de symétrie centrale qui met en jeu la notion de milieu d'un segment et d'équidistance de points. La symétrie axiale traitée dans cette leçon met en jeu la notion de perpendicularité et d'équidistance de points.

Un travail expérimental permet d'obtenir un inventaire abondant de figures simples. Les propriétés invariantes dans une symétrie axiale sont ainsi progressivement dégagées.

Plusieurs erreurs et difficultés apparaissent chez les élèves en rapport avec la symétrie axiale.

En effet, certains élèves n'arrivent pas à mobiliser des images mentales de pliage ou de construction de symétrique. Beaucoup d'élèves s'appuient sur le théorème-élève suivant : Un axe de symétrie d'une figure passe par le «milieu» de cette figure. Autre théorème-élève classique: L'axe de symétrie doit partager la figure en deux parties superposables. Par ailleurs, les élèves privilégient certaines directions, en particulier les axes verticaux ou horizontaux sont plus facilement repérés comme des axes de symétrie. En conséquence :

- dans le cas d'une figure présentant plusieurs axes de symétrie, les élèves ne repèrent que l'axe horizontal ou vertical s'il existe.
- Si une figure ayant un axe de symétrie est représentée de telle sorte que cet axe ne soit ni horizontal, ni vertical, beaucoup d'élèves estimeront que la figure n'admet pas d'axe de symétrie.
- Dans certains cas, il peut aussi y avoir un phénomène de contrat qui amène l'élève à penser qu'il y a au maximum un axe de symétrie par figure (règle induite par les exercices proposés).

Les élèves ne hiérarchisent pas bien les informations fournies par la figure. Dans le cas où la figure est composée de figures élémentaires facilement repérables et possédant chacune un axe de symétrie, les élèves ont tendance à assimiler ces axes avec ceux de la figure complète. Cette analyse des difficultés permet de mettre en évidence les variables didactiques associées à la tâche de reconnaissance d'un axe de symétrie.

Pour remédier ces difficultés et erreurs, l'enseignant doit varier les situations (variables didactiques): position de l'axe de symétrie, nature de la figure, sa position par rapport à l'axe de symétrie.

Les principales variables didactiques sont :

Les outils fournis à l'élève:

* Papier calque : permet de décalquer la figure et de faire divers essais de pliage pour trouver un éventuel axe de symétrie. Pas besoin d'anticiper sur une position éventuelle de l'axe cherché. La situation analogue lorsque l'élève peut plier la feuille sur laquelle est représentée la figure.

* L'élève ne dispose pas des outils ci-dessus et ne peut plier la feuille : il est obligé de faire appel à des images mentales

Le support sur lequel est représentée la figure

* Papier quadrillé. Deux cas bien différents : Dans le premier cas l'axe de symétrie correspond à une ligne du quadrillage. L'axe étant tracé, d'une certaine façon, son repérage en est facilité, (et le décompte des carreaux peux faciliter la vérification) ; Dans le deuxième l'axe ne correspond pas à une ligne du quadrillage. Alors la présence des lignes du quadrillage peut induire l'élève en erreur dans la mesure où il recherchera l'axe uniquement parmi les lignes du papier quadrillé.

* Papier non quadrillé (papier pointé ou papier blanc) : l'élève est obligé de faire appel à des images mentales.

« Les caractéristiques de la figure

* L'orientation de l'axe (quand il existe) : l'élève reconnaîtra plus facilement un axe «horizontal» ou «vertical» qu'un axe oblique.

* Le nombre d'axes de symétrie : si la figure possède plusieurs axes de symétrie, l'élève, après en avoir trouvé un, peut considérer que sa tâche est terminée, et donc ne pas trouver les autres (phénomène de contrat mal perçu déjà signalé).

* La familiarité de l'élève avec la figure : si c'est une silhouette de personne ou un triangle isocèle, l'élève reconnaîtra facilement l'axe de symétrie.

* Les figures de base qui constituent la figure : ¤ Si la figure est composée de deux éléments isolés qui sont symétriques, l'élève reconnaîtra facilement l'existence de l'axe, comme dans l'exemple ci-dessous ; ¤ En revanche, si la figure est composée de deux éléments superposables non symétriques, il risque de considérer que la figure a un axe de symétrie ; ¤ Enfin, si la figure peut être partagée par une droite en deux parties superposables, l'élève risque fort de reconnaître un axe de symétrie alors qu'il n'y en a sans doute pas ; Exemple typique de la diagonale d'un parallélogramme.

La figure est-elle une figure de base ou est-elle composée? Si c'est un polygone, quel est son nombre de sommets ? La figure coupe-t-elle l'axe ? Contient-elle des côtés horizontaux ou verticaux ? Dans ce dernier cas, cela peut renforcer le fait que l'élève suive les lignes du quadrillage.

Consignes données aux élèves :

* peuvent-ils plier la feuille ou non ?

Position de l'axe de symétrie :

* est-il horizontal ? Vertical ? Oblique ?

Les objectifs d'apprentissage sont :

- Construire le symétrique d'un point, d'un segment, d'une demi-droite, d'une droite, d'un cercle par une symétrie axiale ;
- Construire l'axe de symétrie d'une figure ;
- Construire le symétrique d'une figure par rapport à une droite ;
- Connaître et utiliser les propriétés de conservation de la symétrie axiale.

Leçon 7 : Droites remarquables dans un triangle

Les notions en rapport avec le triangle et ses droites remarquables sont étudiées en première année du collège. Il s'agit cette année de les consolider (médiatrice, orthocentre, bissectrice, hauteur, cercles inscrit et circonscrit). Cette leçon aborde les notions nouvelles de médiane dans un triangle et de centre de gravité.

Les objectifs d'apprentissage relatifs à cette leçon sont :

- Connaître, utiliser et maîtriser la définition de la médiatrice et caractériser ses points par la propriété d'équidistance ;
- Construire le cercle circonscrit à un triangle ;

- Construire l'orthocentre d'un triangle ;
- Maîtriser le calcul de l'aire d'un triangle ;
- Connaître, utiliser et maîtriser la définition de la bissectrice d'un angle et la caractériser comme ensemble de points équidistants aux côtés de cet angle ;
- Construire le cercle inscrit à un triangle ;
- Connaître et utiliser la définition de la médiane d'un triangle ;
- Connaître et utiliser le centre de gravité d'un triangle.

Leçon 8 : Triangles : milieux et parallèles

Cette leçon aborde des notions clés de la géométrie en rapport avec le triangle. Il s'agit des droites passant par les milieux des côtés d'un triangle et des propriétés en rapport avec ces droites. Ces propriétés qui préfigurent le théorème de Thalès abordés dans les années suivantes.

Les objectifs d'apprentissage de cette leçon sont ;

- Connaître les théorèmes relatifs aux milieux de deux côtés d'un triangle et les utiliser pour :
- Démontrer que deux droites sont parallèles ;
- Calculer une longueur ;
- Montrer qu'un point est le milieu d'un segment.

Leçon 9 : Calcul littéral

Le langage algébrique permet de formuler des propriétés mathématiques et de résoudre des problèmes. Le calcul littéral contribue donc de façon essentielle à l'objectif « comprendre, s'exprimer en utilisant les langages mathématiques, scientifiques.

Au primaire, l'élève a fait fonctionner de manière implicite les propriétés des opérations dans le champ des nombres, mais sans les avoir formalisées en tant que propriétés générales. Il a rencontré des formules littérales dans le cadre des apprentissages liés aux mesures de grandeurs; la lettre y avait essentiellement valeur d'abréviation ; ainsi, la formule P= L x l est une abréviation de l'expression « aire du rectangle = longueur fois largeur » utilisée par l'élève pour effectuer directement le produit des nombres donnés pour la longueur et la largeur, sans identification explicite du processus de substitution des lettres par des valeurs numériques. L'élève a aussi appris à compléter des égalités à trou, notamment à l'occasion du travail sur les notions de différence et de quotient. Il a résolu des problèmes du premier degré sans avoir recours à la résolution d'équations, mais en agissant par tâtonnements, en ayant recours à des étapes intermédiaires avec ou sans l'aide d'outils numériques (tableur, calculatrice).

Au titre de l'entrée dans l'algèbre, l'enseignement du calcul littéral au collège vise les objectifs suivants:

- traduire le résultat de la suite des opérations d'un programme de calcul sous la forme d'une expression littérale et établir le lien entre l'aspect « procédural » et l'aspect « structural » de cette expression : ainsi, le résultat du programme de calcul « multiplier un nombre par 2 et ajouter 3 au résultat » se traduit par l'expression $2x+3$ dont la structure est celle de la somme de 3 et du double de x ;

- décrire une propriété générale de nombres (par exemple « être la somme de deux entiers consécutifs » ou « être un multiple de 3 ») ;

- démontrer qu'une propriété est vraie dans un cadre général (par exemple les règles du calcul fractionnaire) ;

- modéliser et résoudre des problèmes à l'aide d'équations ou d'inéquations du premier degré ;

- introduire les concepts de variable et de fonction.

Formules et expressions littérales pour généraliser, modéliser ou démontrer

Le travail initié au primaire sur la production et l'utilisation de formules devient, au collège, un objectif de formation. Une formule (expression d'une relation entre des variables) ou une expression littérale (résultat d'un programme de calcul) permettent de décrire une situation générale, le recours à la lettre étant un moyen de s'abstraire de valeurs numériques particulières.

La résolution de problèmes issus de contextes variés permet de motiver la production de formules.

Transformation d'expressions littérales

Dès le début du collège, la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition est implicitement mobilisée lors de calculs sur des nombres, en particulier en calcul mental, par exemple pour calculer 29×21.

L'intérêt, apparu à travers la résolution de problèmes, de transformer une expression numérique pour la simplifier ou l'écrire sous une forme adaptée motive d'institutionnaliser la distributivité simple sous forme littérale. Celle-ci peut s'appuyer sur l'image mentale de l'aire d'un rectangle de longueur $a+b$ et de largeur k décomposé en deux rectangles de largeur k et de longueurs respectives a et b.

Le recours à la distributivité permet ensuite de valider la réduction d'une expression littérale.

Avant d'être automatisées, les stratégies de transformation sont explicitées (par exemple $x=1\times x$;

$-x=(-1)\times x$), pour aboutir progressivement à des calculs du type :

$x-2{,}7\,x=1\times x+(-2{,}7)\times x=(1+(-2{,}7))\times x=(-1{,}7)\times x=-1{,}7x$.

La transformation d'expressions littérales (d'une somme en produit ou vice versa) s'effectue dans le même esprit, à partir de la distributivité simple de la multiplication par rapport à l'addition.

Le travail technique de développement ou de factorisation est accompagné d'une réflexion sur le choix de la forme de l'expression (somme ou produit) la mieux appropriée au problème à résoudre.

De manière générale, les tâches d'exécution (développement, factorisation, réduction) sont articulées avec des activités qui développent l'intelligence des stratégies de calcul comme l'anticipation, l'organisation, le contrôle. Les stratégies de contrôle peuvent s'appuyer sur des arguments de signe, d'homogénéité, des tests sur des valeurs numériques adéquates, etc.

Calcul littéral pour démontrer

Dès le début du cycle, le travail mené sur les nombres conduit à émettre des conjectures, notamment sur les propriétés des opérations entre nombres rationnels. Celles-ci peuvent être démontrées à partir d'exemples génériques, dans des situations simples. On rappelle qu'un exemple est dit « générique » lorsqu'une propriété qu'il permet de mettre en évidence peut être étendue au cas général ; ainsi, on passe de l'exemple générique 23+53= 73 à sa généralisation littérale $\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$ qui consiste à substituer une lettre à une valeur numérique.

Dans le cadre de la différenciation, la démonstration de l'identité $\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$, qui mobilise la notion de quotient, pourra être présentée aux élèves les plus à l'aise (ou en demande de justification).

Progressivement, l'élève perçoit les limites du calcul numérique et la nécessité de passer au calcul littéral pour prouver qu'une propriété est vraie pour toutes les valeurs de la variable (par exemple, que la somme de trois entiers consécutifs est toujours un multiple de 3). Le développement et la factorisation sont des outils pour la résolution des équations.

Rupture arithmétique- algèbre

Le passage du numérique au littéral constitue pour l'élève une rupture importante : d'une part les symboles du calcul littéral (lettres, signe égal et ses différents statuts, signes opératoires, etc.) diffèrent de ceux du langage des nombres ; d'autre part, les types de problèmes que l'algèbre permet de résoudre sont différents de ceux résolus jusque-là. Pour résoudre un problème de ce type, l'élève avait l'habitude de progresser pas à pas depuis les données connues jusqu'à la quantité à trouver. En algèbre, il s'agit au contraire d'établir des relations entre des données connues et le résultat à trouver (l'inconnue), puis de traiter ces relations jusqu'à obtenir le résultat cherché. Il y a là un véritable renversement de pensée qui, pour être compris et assimilé par l'élève, suppose de la part de l'enseignant une vigilance particulière. Celle-ci peut notamment s'exercer à travers la vérification que la solution trouvée convient bien.

Pour motiver le recours au calcul littéral et aider les élèves à accepter une approche autre que numérique, il est essentiel qu'ils soient confrontés à des situations révélant les limites des procédures dont ils disposent déjà, basées sur des tâtonnements, des essais-erreurs. Ils doivent aussi prendre conscience de l'intérêt de désigner des quantités ou des grandeurs par les lettres qui leur sont traditionnellement attribuées (n pour une quantité discrète, ℓ pour une longueur, V pour un volume) plutôt que par leur nom complet.

Les programmes de calcul constituent à la fois un moyen pertinent pour introduire la notion d'expression littérale puis d'équation, et un intermédiaire entre le volet procédural et le volet structural du calcul littéral.

La seule application de « règles » techniques ne permet pas de comprendre l'origine des propriétés qui les sous-tendent. La compréhension d'une formule littérale s'acquiert d'autant plus facilement qu'elle aura été anticipée sur des exemples numériques ou prendra appui sur des images mentales, par exemple celle de l'aire de deux rectangles accolés ayant une dimension en commun pour illustrer la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition. Le nombre de « règles » calculatoires formalisées exigibles des élèves doit rester limité. Parmi elles, la distributivité simple de la multiplication par rapport à l'addition est utilisée dans les deux sens de lecture et invoquée aussi bien pour le développement que la factorisation d'expressions algébriques. La double distributivité, qui permet par exemple de développer une expression du type $(2x+3)\times(4x-7)$, est abordée dans des situations simples en mobilisant deux fois la distributivité, et les résultats sur les puissances ; cette initiation ne vise pas le développement d'automatismes.

Si certaines stratégies peuvent se révéler opérantes, il convient d'être conscient des obstacles qu'elles peuvent provoquer. Il en est ainsi de la règle des signes « moins par moins donne plus » qui confond le sens opérationnel de la soustraction et la notion d'opposé. Elle peut aussi engendrer des conceptions erronées (par exemple que $-(-x)$ est toujours un nombre positif). A contrario, la formulation explicite des propriétés utilisées (par exemple « soustraire un nombre revient à ajouter son opposé ») permet aux élèves de comprendre les manipulations qu'ils effectuent sur des expressions littérales.

Il ne suffit pas qu'une stratégie calculatoire ait été comprise pour qu'elle soit installée et mobilisable. Pour passer de la compréhension d'une propriété à la construction d'un automatisme, il est indispensable que la stratégie ait été régulièrement entretenue, par petites touches, à travers un rite d'activités rapides (questions flash, activités mentales) menées en classe dans la durée, en respectant une gradation progressive de la difficulté (qui pourra être arrêtée collectivement au sein d'un collège), et en développant des démarches de contrôle (arguments de signe, d'homogénéité, recherche de contre-exemples, etc.).

Les exerciseurs et banques d'exercices en ligne peuvent être utilisés par les élèves en classe ou hors de la classe, de manière différenciée. Favorisant le réinvestissement et l'automatisation, ces outils peuvent aider les élèves à élaborer des stratégies mentales efficaces, à condition qu'ils permettent un traitement intelligent des erreurs, et que leur utilisation entre dans le cadre d'une planification et d'un suivi régulier par le professeur. Si des activités à prise d'initiative sont essentielles pour aider l'élève à comprendre la puissance du langage algébrique et les opportunités qu'il offre pour résoudre des problèmes d'un type nouveau, elles ne permettent pas à elles seules de construire l'habileté calculatoire attendue en fin de cycle 4. On veillera donc à maintenir un équilibre entre la construction d'automatismes (à travers un entraînement fréquent et régulier en classe ou hors de la classe) et la résolution de problèmes conduisant à mobiliser des stratégies et des techniques de calcul littéral.

Quelques obstacles

Le passage à l'algèbre correspond à un accès à l'abstraction dont on ne doit pas minimiser la difficulté. L'apprentissage du calcul littéral se heurte de façon naturelle à un certain nombre d'obstacles. Les professeurs aideront d'autant mieux leurs élèves à les surmonter qu'ils en auront une connaissance fine.

Les différentes significations du signe « égal »

Les élèves rencontrent le signe « = » très tôt dans leur scolarité, mais à l'école élémentaire le signe « = » est l'annonce d'un résultat. Ainsi, dans l'égalité 8+5=13, le signe « = » est lu comme «cela donne» ou « cela fait ». Il est alors orienté de la gauche vers la droite et n'est pas perçu comme le symbole d'une relation symétrique et transitive. Cette signification correspond à celle de la touche « ENTER » des calculatrices. Dès le cycle 2, à travers des activités de calcul mental ou en ligne, les élèves sont amenés à utiliser le signe « = » dans l'autre sens, par exemple $5\times36=5\times2\times18$ ou $21=4\times5+1$. Les décompositions additives ou multiplicatives sont choisies en fonction de leur intérêt pour résoudre une classe spécifique de problèmes. Ainsi, la décomposition additive du nombre 42 sous la forme $42=30+12$ facilite le calcul de $42-12+3$, alors que sa décomposition multiplicative $42=3\times2\times7$ permet de factoriser l'expression littérale $3a+42$. L'incapacité de certains élèves à factoriser cette dernière expression peut provenir, non pas d'une méconnaissance du processus de la factorisation, mais d'un manque d'habitude à écrire des décompositions numériques.

À travers la pratique du calcul littéral, le signe « = » acquiert trois autres significations :

- il est utilisé pour rendre compte de l'universalité d'une égalité, traduisant que, quelles que soient les valeurs attribuées aux lettres, les valeurs retournées par les expressions figurant de part et d'autre du signe « = » sont égales. On parle alors d'identité ;

- il est utilisé comme symbole d'affectation, comme en informatique, lorsqu'on se propose de calculer l'expression $(a+2b)^2$ pour $a=1$ et $b=-0,5$;

- en rupture avec chacune de ces significations qui sous-entendent qu'une certaine propriété est vraie (même si c'est dans des conditions différentes), le signe « = » acquiert un statut tout autre dans l'écriture d'une équation. Au lieu d'être utilisé pour écrire des égalités vraies, le signe « = » apparaît alors dans des énoncés dans lesquels, en remplaçant la lettre par un nombre, on obtient une égalité qui, selon la valeur de ce nombre, est soit vraie, soit fausse. Le but de la résolution est de trouver toutes les valeurs (et rien qu'elles) qui, substituées à l'inconnue, rendent l'égalité vraie.

Les différents statuts de la lettre

Au primaire, la lettre est utilisée pour différentes finalités :

- symboliser une unité : m, g, h, s, etc. ;

- désigner un objet mathématique : le point A, le nombre π ;

- désigner dans une formule la mesure d'une grandeur : $A=L\times l$; $P=2\pi R$.

Au collège, la lettre acquiert de nouveaux statuts qu'il convient de bien différencier :

- le statut de variable, qui apparaît à la fois dans les formules (ainsi, dans l'égalité $P=2\pi R$, la valeur du périmètre P dépend des valeurs attribuées à la variable R). La valeur de R modifie la valeur de P.

- le statut d'indéterminée, qui apparaît dans des identités où la lettre représente des nombres quelconques. Il importe que la valeur d'universalité de ces identités apparaisse dans l'environnement de l'égalité, sous une forme accessible aux élèves, par exemple, en écrivant : «Pour toutes valeurs des nombres k, l'égalité $k(a+b)=ka+kb$ est vraie » ;

- le statut d'inconnue, qui heurte l'habitude de penser qu'une égalité est « toujours » vraie. La compréhension de ce qu'est une solution d'une équation nécessite de recourir à des tests de la valeur de vérité de l'égalité en affectant à l'inconnue différentes valeurs numériques. Dès le début du cycle, le recours à une démarche par essais et ajustements et l'utilisation d'un tableur pour tester des valeurs permettent d'introduire progressivement la notion de solution d'une équation. Les limites des méthodes par tâtonnement ou par « remontée » des programmes de calcul permettent de justifier l'étude des techniques de résolution des équations du premier degré.

Il convient donc d'attirer régulièrement l'attention des élèves sur le statut du signe « = » ou des lettres utilisées, selon la situation considérée.

Les parenthèses

Les parenthèses sont des séparateurs de blocs de calcul qui jouent un rôle essentiel dans la construction d'expressions numériques ou littérales. Des parenthèses redondantes, par exemple dans une expression du type $(2x+1)+(3\times(-x))$, peuvent aider l'élève à comprendre la structure de l'expression et l'ordre dans lequel les opérations sont à effectuer. La maîtrise des règles de priorité des opérations lui permettra progressivement de s'en affranchir.

Cette leçon a pour objet le calcul littéral : développement, simplification et factorisation des expressions algébriques.

Les objectifs d'apprentissage sont :

- Développer le produit d'un nombre et une somme ;
- Développer le produit d'un nombre et une différence ;
- Développer le produit de deux sommes ;
- Développer le produit de deux différences
- Factoriser une expression ;
- Connaître les identités remarquables.

Ces objectifs renvoient aux habiletés suivantes : utiliser la distributivité de l'addition par rapport à la multiplication pour développer des expressions algébriques ; simplifier des expressions algébriques; factoriser des expressions algébriques; utiliser convenablement les identités remarquables pour le développement et la factorisation des expressions algébriques.

Le développement et la factorisation est une première entrée des élèves dans l'univers de l'algèbre. Ils commencent à avoir affaire au calcul littéral. La maîtrise de ces habiletés nécessite un exercice soutenu des techniques de calcul. Plusieurs erreurs apparaissent dans ce genre de calcul littéral. Ces erreurs émergent de l'interaction entre des difficultés en rapport avec le calcul numérique et la nouveauté du calcul littéral.

La maîtrise du développement et de la factorisation, particulièrement des identités remarquables constitue un gage de la maîtrise des équations.

Le calcul littéral (factorisation et développement des expressions algébrique) a été abordé de façon profonde en première année de collège. Il s'agit cette année de consolider les acquis des élèves et de les enrichir.

Les objectifs d'apprentissage de cette leçon sont les suivants :

- Connaître une expression littérale ;
- Factoriser, réduire une expression littérale ;
- Développer en utilisant la distributivité ;
- Supprimer les parenthèses ;
- Utiliser les identités remarquables ;
- Connaître la priorité des calculs.

Leçon10 : Equations

La méthode algébrique de résolution des équations du premier degré s'appuie sur les propriétés de l'égalité, par exemple l'invariance des solutions d'une équation par l'ajout d'une même expression à chacun de ses membres.

Pour anticiper la notion d'équation, l'élève apprend, dès le début du collège, à tester une égalité à la main ou à l'aide d'un outil numérique (tableur, calculatrice), en attribuant des valeurs numériques au nombre désigné par une lettre qui figure dans l'égalité. Il apprend à compléter des opérations à trou. Il est initié aux programmes de calcul à partir de programmes dont les opérations sont réversibles et permettent de « remonter » le programme en commençant par la dernière opération. C'est le cas dans l'exemple suivant:

Je pense à un nombre, je le multiplie par 3. Si je retranche 12 au résultat obtenu, j'obtiens 7,5. A quel nombre ai-je pensé ?

La méthode algébrique de résolution des équations du premier degré s'appuie sur les propriétés de l'égalité, par exemple l'invariance des solutions d'une équation par l'ajout d'une même expression à chacun de ses membres. L'utilisation du tableur et la programmation d'algorithmes permettent la résolution, au moins approchée, d'équations d'autres types.

Cette leçon aborde une notion nouvelle pour les élèves et qui fait partie de la pensée algébrique. Il s'agit d'introduire progressivement les élèves au champ algébrique des équations qui est en rupture avec les procédés arithmétiques.

Cette leçon consolide la notion d'équation abordée en première année du collège. Il s'agit de renforcer les connaissances et les habiletés des élèves dans ce domaine fondamental.

La notion d'équation repose sur deux notions essentielles ; l'inconnue, et l'équivalence logique des expressions algébriques. Les élèves doivent saisir le sens de l'expression «résoudre une équation » et les procédés de résolution ainsi que la vérification de la validité des solutions trouvées. Ils doivent aussi comprendre que tester si une égalité comportant un ou deux nombres indéterminés est vraie lorsqu'on leur attribue des valeurs numériques.

Une attention particulière est apportée à l'introduction d'une lettre pour désigner un nombre inconnu dans des situations où le problème ne peut pas être facilement résolu par un raisonnement arithmétique. Les programmes du collège prévoient une initiation progressive à la résolution d'équations, de manière à éviter la mise en œuvre d'algorithmes dépourvus de véritable sens.

Notons enfin que les équations sont un outil puissant pour mathématiser, modéliser et résoudre beaucoup de situations de la vie courantes ou issues d'autres disciplines.

Cette leçon est ainsi une occasion de travailler sur la modélisation par les mathématiques.

Les objectifs d'apprentissage sont :

- Reconnaître des techniques simples de la résolution d'une équation ;
- Résoudre une équation de la forme $ax + b = cx + d$;
- Vérifier les solutions obtenues ;
- Mettre en équation un problème ;
- Résoudre un problème.

Leçon 11 : Ordre et opérations

L'ordre et les opérations constituent des notions omniprésentes dans les calculs et la manipulation des nombres, que ce soit dans la résolution des problèmes ou dans la résolution des équations.

La maîtrise de ces deux notions doit être une priorité pour l'enseignant. En effet, leur disponibilité et leur utilisation est un garant de la réussite de l'utilisation des nombres.

Les règles régissant l'ordre en rapport avec les opérations doivent être bien assimilées.

Des erreurs sont fréquentes dans l'utilisation de l'ordre et des opérations ; par exemples multiplier une inégalité par un nombre négatif sans changement du symbole, ou « soustraire deux inégalités ».

Dans cette leçon, les objectifs d'apprentissage sont :

- Comparer deux nombres relatifs, en particulier connaître et utiliser :
  - L'équivalence entre $a > b$ et $a-b>0$
  - L'équivalence entre $a<b$ et $a-b<0$;
- Utiliser le fait que des nombres relatifs de l'une des deux formes suivantes sont rangées dans le même ordre que a et b : $a+c$ et $b+c$; $a-c$ et $b-c$;
- Utiliser le fait que des nombres relatifs de la forme ac et bc sont dans le même ordre que a et b si c est strictement positif, dans l'ordre inverse si c est strictement négatif ;
- Ecrire un encadrement d'un nombre relatif ;
- Utiliser la notation scientifique pour obtenir un encadrement.

Leçon 12 : Triangle rectangle et cercle

Le triangle rectangle joue un rôle important dans la géométrie et intervient dans plusieurs configurations et problème. Plusieurs propriétés sont reliées au triangle rectangle comme le théorème de Pythagore, les rapports trigonométriques. Le cercle circonscrit au triangle rectangle a aussi des propriétés géométriques intéressantes comme par exemple d'avoir l'hypoténuse du triangle comme diamètre et ce qui en découle comme autres propriétés.

les objectifs d'apprentissage sont :

- Caractériser le triangle rectangle par l'égalité de Pythagore ;
- Calculer le carré de la longueur d'un côté d'un triangle à partir de ceux des deux autres côtés ;
- Caractériser le triangle rectangle par son inscription dans un cercle dont le diamètre est un côté du triangle ;
- Caractériser les points d'un cercle de diamètre donné par la propriété de l'angle droit ;
- Utiliser dans un triangle rectangle la relation entre le cosinus d'un angle aigu et les longueurs des côtés adjacents ;
- Utiliser la calculatrice pour déterminer un cosinus ou un angle aigu.

Leçon 13 : Vecteurs et translation

La translation est une transformation géométrique importante en mathématiques ses usages sont multiples en mathématiques, dans les autres sciences. Elle est conceptuellement liée à la notion de vecteur. Cette dernière notion est aussi riche et reliée à d'autres notions comme le parallélogramme.

Une des difficultés par rapport à la translation est de la confondre avec d'autres transformations géométriques comme la symétrie ou la rotation. Quant aux difficultés en rapport avec la notion de vecteurs c'est de le concevoir comme des bipoints équipollents.

Quand on aborde l'enseignement des transformations du plan on n'a plus cette possibilité car on ne peut pas montrer une transformation ou dessiner une transformation. On ne peut en voir que les effets. On peut dessiner le translaté d'un triangle, on ne peut pas dessiner une translation. Cela tient à la nature même des transformations qui constituent un ensemble de concepts abstraits non identifiables à des objets. Dès lors, si nous ne pouvons pas définir les transformations en les montrant, comment aider les élèves à les appréhender, à les concevoir et plus tard à les maîtriser?

La notion de translation comme glissement est en cours d'acquisition. On peut penser que cette acquisition se fait suivant la progression suivante:

- **les objets:** considérés dans leur globalité puisqu'on les montre représentés par des dessins ou identifiés aux dessins;
- **les points particuliers:** extrémités, sommets, points remarquables;
- **un point quelconque:** un point de l'objet, n'importe quel point de l'objet;
- **le point:** isolé, objet en lui-même, objet élémentaire;
- **l'ensemble de points:** les points de l'objet, les points constituant l'objet;
- **le plan:** ensemble de tous les points, ensemble de référence.

L'enseignement des vecteurs vise à faire passer les élèves de la géométrie euclidienne du plan et de l'espace à une géométrie vectorielle. Les vecteurs sont définis par leurs caractéristiques géométriques de longueur, de direction et de sens. On traite ensuite la notion d'égalité de deux vecteurs, la somme de deux vecteurs et puis on relie la notion de vecteur au parallélogramme.

Les objectifs d'apprentissage de cette leçon sont les suivants :

- Construire l'image d'une figure géométrique par une translation ;
- Déterminer le vecteur d'une translation ;
- Reconnaître un vecteur : direction, sens, longueur et le construire ;
- construire la somme de deux vecteurs ; parallélogramme, relation de Chasles.

Leçon 14 : Prisme droit, pyramide et cône de révolution

La notion de prisme droit a été étudiée en première année du collège avec la notion de cylindre, cette année deux solide sont abordés : la pyramide et le cône de révolution.

L'objectif est d'entretenir et d'approfondir les acquis : représenter, décrire et construire des solides de l'espace, en particulier à l'aide de patrons. Passer de l'objet à ses représentations (et inversement) constitue encore l'essentiel du travail. L'observation et la manipulation d'objets usuels sont des points d'appui indispensables. Le dessin de ces solides en perspective cavalière, le calcul de l'aire latérale et de l'aire totale et du volume d'une pyramide et d'un cône de révolution sont des objectifs fondamentaux de cette leçon.

Les objectifs de cette leçon sont :

- Reconnaître et fabriquer un prisme droit et consolider mes acquis ;
- Reconnaître et fabriquer une pyramide et un cône de révolution ;
- Dessiner ces trois solides en perspective cavalière ;
- Reconnaître et dessiner des patrons de ces trois solides ;
- Calculer l'aire latérale et l'aire totale d'une pyramide et d'un cône de révolution ;
- Calculer le volume d'une pyramide et d'un cône de révolution ;
- Connaître les positions relatives des droites et des plans dans l'espace.

3. ORGANISATION ET GESTION DES DONNEES

L'organisation et la gestion des données sont indispensables pour comprendre un monde contemporain dans lequel l'information chiffrée est omniprésente, et pour y vivre. Il faut d'abord apprendre à lire et interpréter des tableaux, schémas, diagrammes. Puis apprendre à passer d'un mode de représentation à l'autre, à choisir le mode le plus adéquat pour organiser et gérer des données. Émerge ainsi la proportionnalité et les propriétés de linéarité qui lui sont associées. En demandant de s'interroger sur la signification des nombres utilisés, sur l'information apportée par un résumé statistique, sur les risques d'erreur d'interprétation et sur leurs conséquences possibles, y compris dans la vie courante, cette partie des mathématiques contribue à former de jeunes adultes capables de comprendre les enjeux et débats de la société où ils vivent. Enfin, en tant que discipline d'expression, les mathématiques participent à la maîtrise de la langue, tant à l'écrit – rédaction, emploi et construction de figures, de schémas, de graphiques – qu'à l'oral, en particulier par le débat mathématique et la pratique de l'argumentation.

Au collège, la proportionnalité occupe une place centrale. Elle a été traitée en première année et sera consolidée, enrichie et élargie en deuxième année.

Les méthodes de résolution des problèmes de proportionnalité évoluent avec les connaissances des élèves, notamment avec une meilleure maîtrise de la notion de quotient. La partie relative au traitement et à la représentation de données a pour objectif d'initier à la lecture, à l'interprétation, à la réalisation et à l'utilisation de diagrammes, tableaux et graphiques et de mettre en évidence la relativité de l'information représentée. Les travaux correspondants sont conduits à partir d'exemples et en liaison, chaque fois qu'il est possible, avec l'enseignement des autres disciplines et l'étude des thèmes de convergence.

La résolution de problèmes a pour objectifs :

- d'affermir la maîtrise des principaux raisonnements qui permettent de traiter les situations de proportionnalité,
- d'initier les élèves au repérage sur une droite graduée ou dans le plan muni d'un repère,

- d'acquérir et interpréter les premiers outils statistiques (organisation et représentation de données, fréquences) utiles dans d'autres disciplines et dans la vie de citoyen, de se familiariser avec des écritures littérales

Dans la Collection « Univers des Maths », les leçons concernant le domaine « Organisation et gestion des données», programmés en première année du collège sont les suivantes.

Leçon 15 : Proportionnalité

La proportionnalité, notion fondamentale dans tous les cycles d'enseignement est traitée cette année sur les aspects suivants : propriété de linéarité, tableau de proportionnalité, caractérisation graphique, passage à l'unité ou «règle de trois », pourcentage et échelle.

Les élèves doivent être capables de :

- Compléter un tableau de nombres représentant une relation de proportionnalité, en particulier déterminer une quatrième proportionnelle.
- Reconnaître si un tableau complet de nombres est ou non un tableau de proportionnalité.
- Mettre en œuvre la proportionnalité dans les cas suivants :
- comparer des proportions,
- utiliser un pourcentage,
- calculer un pourcentage,
- utiliser l'échelle d'une carte ou d'un dessin
- calculer l'échelle d'une carte ou d'un dessin.

Le travail sur des tableaux de nombres sans lien avec un contexte doit occuper une place limitée. Les activités numériques et graphiques font le plus souvent appel à des situations mettant en relation deux grandeurs. Il est possible d'envisager, dans une formule, des variations d'une grandeur en fonction d'une autre grandeur mais toute définition de la notion de fonction est exclue. Les procédures utilisées pour traiter une situation de proportionnalité sont de même nature qu'en classe de sixième primaire. Pour les coefficients de proportionnalité ou les rapports de linéarité exprimés sous forme de quotient, on choisira des nombres qui évitent des difficultés techniques inutiles.

Un travail doit être conduit sur la comparaison relative d'effectifs dans des populations différentes ou de proportions dans un mélange. Il s'articule avec l'utilisation de l'écriture fractionnaire pour exprimer une proportion.

Les objectifs de la leçon sont les suivants :

- Reconnaître un tableau de proportionnalité ;
- Caractériser la proportionnalité par l'alignement de points avec l'origine du repère ;
- Lire une représentation graphique dans un repère ;

- Connaître des situations de proportionnalité ;
- Caractériser graphiquement la proportionnalité.

Leçon 16 : Statistiques

Représentation et traitement des données

Les principales capacités visées sont de calculer des effectifs, calculer des fréquences et regrouper des données en classes d'égale amplitude.

Les élèves sont entraînés à lire, interpréter et représenter des données en utilisant un vocabulaire adéquat dans des contextes qui leur sont familiers. Les écritures 4/10, 2/5, 0,4, 40 % sont utilisées pour désigner une fréquence : elles permettent d'insister sur les diverses représentations d'un même nombre.

Tableau de données, représentations graphiques de données.

Il s'agit à cet égard de maîtriser les habiletés suivantes : Lire et interpréter des informations à partir d'un tableau ou d'une représentation graphique (diagrammes divers, histogramme). Présenter des données sous la forme d'un tableau, les représenter sous la forme d'un diagramme ou d'un histogramme (dans ce cas les classes sont toujours de même amplitude).

Le choix de la représentation est lié à la nature de la situation étudiée. L'utilisation d'un tableur permet d'enrichir ce travail en le prolongeant à des situations plus complexes que celles qui peuvent être traitées « à la main ».

Le traitement des données numériques consiste en la lecture, l'interprétation, l'organisation, la synthétisation et la représentation de données chiffrées. Les activités relatives au traitement de données permettent de développer les compétences mathématiques, et plus particulièrement la capacité à communiquer, à représenter et à exercer son esprit critique, participant ainsi à la formation de citoyens éclairés et responsables.

L'objectif est de fournir aux élèves des méthodes, d'une part pour comprendre les informations qu'ils rencontrent dans différents contextes sous la forme de tableaux, de graphiques ou de diagrammes, et d'autre part pour synthétiser et représenter sous une forme adaptée des données chiffrées qu'ils sont amenés à recueillir ou consulter, et en donner des résumés en utilisant quelques caractéristiques simples de statistique descriptive.

Dans un monde où les élèves sont confrontés en permanence à des images, il est primordial de les amener à réfléchir sur celles d'entre elles qui représentent des données.

Pour traiter des données, l'élève lit, interprète, commente et produit des tableaux et des graphiques; il étudie des relations entre des données statistiques et il les représente graphiquement. La lecture critique de diagrammes ou de représentations de données issues de différents supports amène l'élève à s'interroger sur la crédibilité des sources d'information ; elle contribue à l'éducation aux médias et à la maîtrise des techniques usuelles de l'information et à la formation du citoyen.

Les élèves sont entraînés à lire, interpréter et représenter des données en utilisant un vocabulaire adéquat dans des contextes qui leur sont familiers.

En première année du collège ont été traitées les notions suivantes : pourcentage ; tableau ou d'une représentation graphique de données, diagramme ou d'un histogramme ; effectifs et fréquences ; classes d'égale amplitude. Cette année ces notions seront enrichies par les notions d'effectifs cumulés et de fréquences cumulées et de moyenne.

Les objectifs d'apprentissage de la leçon sont les suivants :

- Lire, utiliser et interpréter des données à partir d'un tableau ;
- Organiser des données en choisissant un tableau adapté ;
- Lire, utiliser et interpréter un graphique, un diagramme circulaire ;
- Calculer des effectifs et des effectifs cumulés ;
- Calculer des fréquences et des fréquences cumulées ;
- Calculer des moyennes.

Mise en œuvre des leçons

Nombres relatifs (révision)

Repères didactiques

Les nombres relatifs sont utilisés pour décrire des situations dans lesquelles il y a besoin de définir un référentiel où un point-repère par rapport auquel se situent les autres points. C'est de là que vient le terme « relatif ». On définit le « négatif » par ce qui vient avant le point-référent et le « positif » ce qui vient après. Pour la température par exemple il y a le 0, la température au-dessous de 0 est négative, ce qui est dessus de 0 est positif.

L'introduction en première année du collège des nombres décimaux négatifs a permis d'étendre l'ensemble des décimaux positifs à un ensemble plus vaste (celui des décimaux positifs et négatifs), dans lequel toutes les soustractions sont possibles. Cette extension est réalisée de manière à maintenir les propriétés des opérations valables entre nombres décimaux positifs (principe de permanence) ; accorder le statut de nombres (en tant qu'objets mathématiques sur lesquels on peut effectuer des opérations et des comparaisons) à des réalités de la vie quotidienne situées « au-dessous de zéro » (températures, profondeurs, dettes, etc.) ; disposer de ces nouveaux outils pour modéliser et résoudre des problèmes de la vie courante ; étendre à la droite entière la graduation déjà connue de la demi-droite, repérer et se repérer sur une droite.

Cette année il s'agit de consolider ces acquis à travers une révision des contenus traités (ordre, addition, soustraction, multiplication et division de nombres relatifs).

Objectifs d'apprentissage

- Connaître les règles d'addition et de soustraction des nombres relatifs ;
- Savoir additionner et soustraire des nombres relatifs ;
- Connaître les règles de multiplication et de division des nombres relatifs : connaître la règle des signes et les priorités de calcul ;
- Savoir calculer le produit et le quotient des nombres relatifs,
- Savoir calculer des expressions contenant des nombres relatifs.

Je vérifie mes prérequis

Ce QCM vérifie la maîtrise des élèves de notions acquises relativement : aux nombres négatifs; l'expression symbolique des nombres positifs et négatifs; la comparaison de fractions; la somme de deux nombres relatifs; l'opposé d'un nombre négatif.

Activités de découverte

Activité 1 et Activité 2

Ces deux activités mettent en jeu l'addition et la soustraction de nombres négatifs dans deux contextes familiers (perte et gain dans un jeu, goal average en football). Ce qui va permettre aux élèves de rafraîchir et réinvestir leurs acquis.

Activité 3 et Activité 4

Ces deux activités abordent les règles des signes dans la multiplication des nombres négatifs.

Activité 5

Cette activité aborde le quotient de deux nombres relatifs et son signe.

Cours

Des activités traitées, l'élève doit retenir :

1. La définition d'un nombre relatif;
2. L'ordre des nombres négatifs (par exemple un nombre positif est supérieur à tous les nombres négatifs);
3. Les règles d'addition et de soustraction des nombres relatifs;
4. Les règles de multiplication et de division des nombres relatifs et le quotient.

Exercices résolus

1. L'exercice 1 traite de la méthode pour calculer le produit ou le quotient de deux nombres relatifs : d'abord s'intéresser au signe du produit en appliquant la règle des signes ensuite calculer avec les deux nombres. De plus en appliquant la règle des signes, si dans un produit il y a un nombre impair de nombres négatif le produit est négatif.
2. L'exercice 2 donne une méthode pour calculer la somme de plusieurs nombres relatifs : regrouper les nombres qui ont le même signe.
3. L'exercice 3 traite le fait que la somme de nombres qui ont même signe a le même signe.
4. L'exercice 4 montre comment mener un calcul d'une expression qui comprend des parenthèses. Il faut commencer par calculer ce qui est entre parenthèses.

Exercices et problèmes

Exercice 1

Il s'agit dans cet exercice de définir les abscisses des points A, B, C, D, E et F.

A(0), B(-0,25), C(1,5), D(-1), E(-1,25) et F(0,75).

Exercice 8

Dans cet exercice il s'agit de compléter une égalité :

a) (-10)+ 35 = 25

b) (+16) - (-26) = 42

c) (+25) -(-13)+(-5) + (-7) = 26

d) (-63) + (-8) - (-74) + (+18) = 21

Exercice 24

Dans cet exercice on applique les régles des signes pour trouver le signe d'un produit :

a) Nombre négatif

b) Nombre positif

c) Nombre positif

d) Nombre positif

e) Nombre négatif

Exercice 29

Il s'agit de compléter un produit :

a) (-4) x (-5) = 20

b) (-13) x 3 = -39

c) (-6) x 7 = -42

d) (-11) x (-11) = 121

Exercice 33

a) $\frac{4}{-3} = 4 \times \frac{1}{-3}$

b) $\frac{1}{-6} \times (-5) = \frac{5}{6}$

c) $\left(\frac{-1}{6}\right) \times (-7) = \frac{7}{6}$

Exercice 37

Puisque a est positif et b est négatif, et par les règles des signes, alors :

a) $\frac{a}{5}$ est positif

b) $\frac{a}{-8}$ est négatif

c) $\frac{7}{b}$ est négatif

d) $\frac{b}{-9}$ est positif

e) $\frac{ab}{2}$ est négatif

f) $\frac{b}{-3a}$ est positif

Exercice 43

Plusieurs solutions sont possibles :

a) $(-6) = \frac{12}{-2} = -\frac{12}{2} = \frac{24}{-4}$ etc.

b) $(-6) = 3 \times (-2) = (-3) \times 2$

c) $(-6) = (-4) + (-2) = (-5) + (-1) = 8 + (-14)$ etc.

d) $(-6) = 5 - 11 = 2 - (-4)$ etc.

QCM pour s'évaluer.

Ce QCM permet aux élèves de vérifier leur degré d'acquisition des notions traitées dans la leçon (concepts, techniques, règles, formules…) : abscisses, comparaison, opérations sur les nombres relatifs, opposé, inverse d'un nombre relatif…

Répondre correctement aux items du QCM est un indice de l'atteinte par les élèves des objectifs de la leçon. Des erreurs ou des difficultés dans les réponses à ces items doivent inciter les élèves à revoir leurs cours, approfondir leur compréhension. L'enseignant doit aussi tirer profit de ce QCM pour réguler son enseignement et prévoir des activités de remédiation et de renforcement des acquis de ses élèves.

2 Nombres rationnels: Introduction et comparaison

Repères didactiques

L'objetif de la leçon est de consolider les acquis de la première année du collège sur les fractions et enrichir les conceptions y afférentes et de les généraliser aux nombres rationnels.

Les nombres rationnels sont une généralisation des fractions étudiées au primaire et en première année du collège. Il s'agit dans cette leçon d'amener les élèves à maîtriser des nombres rationnels et de les manipuler dans les calculs et la résolution des problèmes.

L'enseignant doit être vigilant quant aux difficultés et erreurs en rapport avec les nombres rationnels ; comparaison, réduction au même dénominateur surtout.

Des erreurs sont très persistantes comme la comparaison de deux nombres rationnels en comparant les numérateurs et les dénominateurs, la réduction au même dénominateur.

Objectifs d'apprentissage

- Calculer l'inverse d'un nombre décimal relatif non nul ;
- Connaître les nombres rationnels ;
- Déterminer le signe d'un nombre rationnel ;
- Utiliser l'équivalence entre deux nombres rationnels égaux et produits en croix égaux ;
- Transformer, simplifier un nombre rationnel ;
- Réduire au même dénominateur deux nombres rationnels ;
- Comparer deux nombres rationnels en écriture décimale ou fractionnaire.

Je vérifie mes prérequis

Ce QCM vérifie la maîtrise des élèves des fractions : sens et représentation concrète d'une fraction d'un tout, passage de l'écriture fractionnaire à l'écriture décimale et l'inverse, l'égalité de deux fractions, la comparaison de deux fractions.

Activités de découverte

Activité 1

1) dans cette activité on aborde la fraction d'une aire d'un carré.

2) Cette fraction est constituée elle-même d'autres fractions égales qui, additionnées correctement donnent cette fraction.

Activité 2

Comme l'activité 1, l'objet de cette l'activité est de manipuler des fractions exprimant des aires de surfaces. Ici la figure de base est un cercle.

Activité 3

1),2) et **3)** Dans cette activité dont le contexte concret utilise des plaquettes de chocolat partagées en sous parties égales de différentes dimensions, on arrive à écrire des fractions sous différentes formes. Ainsi les enfants ont mangé les mêmes quantités de chocolat :
$\frac{12}{36}$ (Jamal)= $\frac{1}{3}$ (Leila)= $\frac{6}{18}$ (Farid) = $\frac{2}{6}$ (Karim) = $\frac{8}{12}$ (Amine) = $\frac{8}{24}$ (Salima).
La question 4) permet de percevoir comment passer d'une fraction à une autre en multipliant ou en simplifiant par un même nombre non nul.

Activité 4

1) En prenant comme unité d'aire la moitié du petit carreau on trouve que dans les trois rectangle, la partie coloriée vaut $\frac{16}{24}$.

2) $\frac{16}{24} = \frac{8x2}{8x3}$ donc $\frac{16}{24} = \frac{2}{3}$
Cette activité introduit ainsi dans cet exemple la notion de simplification d'un nombre rationnel ou fraction.

Activité 5

Dans cette activité, on range et on compare des nombres rationnels à l'aide d'une droite graduée.

- D'abord des nombres rationnels qui ont le même dénominateur 6
- Ensuite deux nombres rationnels qui ont deux dénominateurs différents : $\frac{2}{3}$ et $\frac{5}{6}$. Dans ce cas on rend au même dénominateur pour : $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$.

Cours

Des activités traitées, l'élève doit retenir :

1. L'inverse d'un nombre rationnel $\frac{a}{b}$ est $\frac{b}{a}$;

2. Tous les nombres décimaux sont des nombres rationnels mais il existe des nombres rationnels qui ne sont pas des nombres décimaux (exemples $\frac{1}{7}$; $\frac{5}{3}$...);

3. La règle des signes d'un nombre rationnel : il est positif si le numérateur et le dénominateur sont de même signe et négatif s'ils sont de signe contraire;

4. La règle de simplification d'un nombre rationnel et la notion de fraction irréductible : multiplier ou diviser le numérateur et le dénominateur par un même nombre non nul;

5. Réduire au même dénominateur des nombres rationnels;

6. Règles de comparaison de nombres rationnels, particulièrement la règle en croix.

Exercices résolus

1. L'exercice traite comment calculer le prix d'une unité connaissant le prix du nombre donné d'unités. La méthode consiste à trouver le quotient du prix total et du nombre d'unités ; prix d'un litre = $\frac{30,6}{9}$dh.

2. L'exercice montre comment comparer deux fractions en simplifiant l'une des deux

$\frac{12}{28} = \frac{3x4}{7x4} = \frac{3}{7}$

Par contre on ne peut pas aboutir à $\frac{4}{11}$ en simplifiant la fraction $\frac{12}{31}$ (car on passe de 4 à 12 en multipliant par 3, mais en multipliant 11 par 3 on ne tombe pas sur 31). Donc les deux nombres sont différents.

3. Dans cet exercice on fait usage du produit en croix pour comparer deux nombres rationnels

$\frac{2,1}{3,5} = \frac{4,1}{6,9}$

2,1 x 6,9 = 14,49 et 3,5 x 4,1 = 14,35. Les deux produits sont différents.

Donc les deux nombres rationnels sont différents.

4. L'exercice 4 montre comment utiliser le produit en croix pour déterminer un nombre manquant dans l'égalité de deux nombres rationnels : $-\frac{1,2}{6} = \frac{...}{7}$

Donc 1,2 x 7 = 6 x ...

D'où 6 x ... = -8,4

Et alors ... = $-\frac{8,4}{6}$ = -1,4.

5. Dans cet exercice on réduit au même dénominateur deux nombres rationnels $\frac{2}{9}$ et $\frac{5}{12}$. Il suffit alors d'identifier le plus petit multiple commun des deux dénominateurs 9 et 12, à savoir 36.

6. Dans cet exercice on compare deux nombres rationnels $\frac{2}{7}$ et 3/8, dont les dénominateurs sont premiers entre eux 7 et 8. Le plus petit dénominateur commun est alors 7 x 8 = 56.

Donc $\frac{2}{7} = \frac{2x8}{7x8} = \frac{16}{56}$ et $\frac{3}{8} = \frac{3x7}{8x7} = \frac{21}{56}$

En comparant les deux numérateurs :16<21 on conclut que $\frac{2}{7} < \frac{3}{8}$.

Exercices et problèmes

Exercice 3

a = 0,1 = $\frac{1}{10}$; b = -0,5 = $-\frac{5}{10}$; c = -0,25 = $-\frac{25}{100}$.

Exercice 7

a= $-\frac{3}{5}$ est négatif car le dénominateur et le numérateur sont de signes opposés; b= $\frac{3}{-5}$ est négatif car le dénominateur et le numérateur sont de signes opposés ; c= $\frac{-3}{-5}$ est positif car le dénominateur et le numérateur ont même signe.

Exercice 9

a) $\frac{-5}{12} = \frac{-5x3}{12x3} = -\frac{15}{36} = \frac{-15:2}{36:2} = \frac{-7,5}{18}$

b) On utilise la règle du produit en croix : $\frac{....}{-2,4} = \frac{0,8}{3,2}$ donc .... x 3,2 = -2,4 x 0,8 donc .... x 3,2 = -1,92

Donc .... = $-\frac{-1,92}{3,2}$ = -0,6

$\frac{-0,6}{-2,4} = \frac{0,8}{3,2}$

c) On utilise la règle du produit en croix $\frac{4}{...} = \frac{5}{7}$ donc .... x 5 = 4 x7 alors .... = $\frac{28}{5}$ = 5,6

et donc $\frac{4}{5,6} = \frac{5}{7}$

Exercice 16

Il s'agit de rendre au même dénominateur plusieurs nombres rationnels dont les dénominateurs sont respectivement 5 ; 4 ; 8 ; 2 ; 20.

Le plus petit multiple commun à tous ces nombres est 40. D'où

$\frac{3}{5} = \frac{3x8}{5x8} = \frac{24}{40}$

$\frac{7}{4} = \frac{7x10}{4x40} = \frac{70}{40}$

$\frac{3}{8} = \frac{5x3}{5x8} = \frac{15}{40}$

$\frac{5}{2} = \frac{20x5}{20x2} = \frac{100}{40}$

$\frac{11}{20} = \frac{2x11}{2x20} = \frac{22}{40}$

Exercice 18

a) $\frac{3}{7} < \frac{4}{7}$ car les deux nombres rationnels ont même dénominateurs 7 et on a 3<4

b) $\frac{1,5}{16} > \frac{1,05}{16}$ car les deux nombres rationnels ont même dénominateurs 16 et on a 1,5>1,05

c) $\frac{12}{3,5} > \frac{11,9}{3,5}$ car les deux nombres rationnels ont même dénominateurs 3,5 et 12>11,9

d) $\frac{23}{30} > \frac{21,5}{30}$ car les deux nombres rationnels ont même dénominateurs 30 et on a 2>21,5

Exercice 22

On réduit au même dénominateur les deux nombres rationnels dans chaque cas :

a) $-\frac{5}{8} = -\frac{15}{24}$ et $-\frac{3,8}{6} = -\frac{15,2}{2}$

Puisque -15 > -15,2 alors $-\frac{5}{8} > -\frac{3,8}{6}$

b) 14/5 = $\frac{98}{35}$ et $\frac{20}{7} = \frac{100}{35}$

Puisque 98 < 100 alors $\frac{14}{5} < \frac{20}{7}$

c) Dans ce cas on n'a pas besoin de rendre au même dénominateur car $\frac{3}{-50}$ est négatif et $\frac{4}{75}$ est positif donc $\frac{3}{-50} < \frac{4}{75}$.

d) $\frac{54,5}{0,27} = \frac{54,4x0,13}{0,27x0,13} = \frac{7,035}{0,0351}$

et $\frac{-2,62}{-0,13} = \frac{-2,62x0,27}{-0,13x0,27} = \frac{-0,7074}{-0,0351} = \frac{0,7074}{0,0351}$

Puisque 0,7074<7,035 alors 54,5/0,27>-2,62/-0,13.

Exercice 24

a) Sont rangés de façon que le plus petit est celui qui a le plus grand dénominateur.

b) Ainsi $\frac{3,5}{8,2} < \frac{3,5}{8,15}$ car 8,2>8,15

De même $\frac{-(-1)}{6}$ qui est égal à $\frac{1}{6} < \frac{1}{5,7}$ car 6>5,7.

Exercice 28

On commence par rendre au même dénominateur les quatre nombres :

$\frac{4}{3} = \frac{24}{18}$; $\frac{16}{9} = \frac{32}{18}$; $\frac{8}{3} = \frac{48}{18}$ et $\frac{7}{6} = \frac{21}{18}$

D'où : $\frac{7}{6} < \frac{4}{3} < \frac{16}{9} < \frac{8}{3}$.

QCM pour s'évaluer.

Ce QCM permet aux élèves de vérifier leur degré d'acquisition des notions traitées dans la leçon (concepts, techniques, règles, formules…) : sens d'une fraction, partie ou pourcentage d'une fraction, différentes écritures d'un même nombre rationnel, comparaison des nombres rationnels.

Répondre correctement aux items du QCM est un indice de l'atteinte par les élèves des objectifs de la leçon. Des erreurs ou des difficultés pour répondre à ces items doivent inciter les élèves à revoir leurs cours, approfondir leur compréhension. L'enseignant doit aussi tirer profit de ce QCM pour réguler son enseignement et prévoir des activités de remédiation et de renforcement des acquis de ses élèves.

3 Nombres rationnels : Somme et différence

Les opérations d'addition et de soustraction des nombres rationnels sont deux notions fondamentales mettant en œuvre la réduction au même dénominateur les nombres en jeu.

L'enseignant doit être vigilant quant à la technique d'addition et de soustraction, particulièrement la réduction au même dénominateur des nombres rationnels en jeu, et de traiter des erreurs fréquentes comme d'additionner (ou de soustraire) deux fractions en additionnant (soustrayant) deux à deux leurs numérateurs et leurs dénominateurs.

Objectifs d'apprentissage

- Connaître les règles d'addition et de soustraction des nombres rationnels ;
- Savoir additionner des nombres rationnels dont les dénominateurs sont les mêmes ;
- Savoir additionner des nombres rationnels dont les dénominateurs sont différents ;
- Savoir soustraire des nombres rationnels dont les dénominateurs sont les mêmes ;
- Savoir soustraire des nombres rationnels dont les dénominateurs sont différents.

Je vérifie mes prérequis

Ce QCM vérifie la maîtrise des élèves des opérations sur les fractions, largement abordées dans les années précédentes et permet de diagnostiquer des erreurs fréquentes par exemple d'additionner ou soustraire deux fractions en additionnant ou en soustrayant deux à deux leurs numérateurs et leurs dénominateurs.

Activités de découverte

Activité 1

Dans cette activité on aborde l'addition de deux fractions.

1) a) Dans cette question on aborde l'addition de deux fractions à l'aide du modèle imagé: un disque partagé en deux parties égales et un autre de même rayon en trois parties égales.

En reproduisant dans un troisième disque les parties colorées dans les deux premiers disques, et on partageant la surface coloriée en 5 parties égales, on en déduit que $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$.

b) Dans cette question on retrouve le résultat précédent algébriquement en rendant au même dénominateur.

2) dans cette question on applique la règle découverte précédemment.

3) Dans cette question, on induit la règle générale d'addition de deux fractions.

Activité 2

Cette activité aborde l'addition et la soustraction de deux fractions.

La question 1) a pour objet l'addition de deux fractions et dans la question 2) la soustraction de deux fractions par la technique du complément : $\frac{7}{12} + ... = \frac{2}{3}$ d'où on déduit $\frac{2}{3} - \ldots = \frac{7}{12}$. Pour répondre à la question on écrit : $\frac{7}{12} + ... = \frac{8}{12}$ d'où ? $= \frac{1}{12}$.

Et donc : $\frac{2}{3} - \frac{1}{12} = \frac{7}{12}$.

Activité 3

Dans cette activité il s'agit d'écrire des nombres de la forme n + a/b sous la forme c/d.

1) Par exemple : $2 + \frac{1}{3} = \frac{6}{3} + \frac{1}{3} = \frac{7}{3} = 7 \times \frac{1}{3}$.

Donc Karim a passé 7 tiers d'heure devant la télé.

2) $1 + \frac{1}{4} = \frac{4}{4} + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} = 5 \times \frac{1}{4}$.

Donc Karim a passé 5 quarts d'heure en révision.

3) $\frac{7}{3} + \frac{5}{4} = \frac{28}{12} + \frac{15}{12} = \frac{43}{12} = 43 \times \frac{1}{12}$.

Au total Karim a passé 43 douzièmes d'heure à voir à la télé et en révision.

Activité 4

1) Dans cette activité on travaille l'addition et la soustraction de nombres rationnels :

Le temps passé par Salma à réfléchir toute seule est $\frac{1}{2}$

2) C'est aussi $1 - \frac{1}{2}$

3) $\frac{1}{2} = \frac{1 \times 3}{2 \times 3} = \frac{3}{6}$

Et $\frac{1}{3} = \frac{1 \times 2}{3 \times 2} = \frac{2}{6}$

4) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$ et $1 - (\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) = 1 - \frac{5}{6} = \frac{6}{6} - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$

Activité 5

Dans cette activité, on travaille aussi l'addition et la soustraction de nombres rationnels :

La fraction du trajet parcourue par les deux amis est $\frac{3}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8} + \frac{2}{8} = \frac{5}{8}$.

Il reste donc la fraction à parcourir : $1 - \frac{5}{8} = \frac{8}{8} - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$.

Activité 6

a) il reste $\frac{5}{8}$ de la tarte, on en soustrait $\frac{2}{8}$ mangé par Karim. Il reste $\frac{3}{8}$.

b) Pour soustraire deux fractions qui ont même dénominateur, on soustrait les numérateurs et on conserve le dénominateur : par exemple $\frac{5}{8} - \frac{2}{8} = \frac{3}{8}$.

c) $\frac{9}{2} - \frac{7}{2} = \frac{9-7}{2} = \frac{2}{2} = 1$

$\frac{9}{10} - \frac{4}{10} = \frac{9-4}{10} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

$\frac{21}{6} - \frac{17}{6} = \frac{21-17}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

Cours

Des activités traitées, l'élève doit retenir :

1. Ce que signifie réduire au même dénominateur des fractions;

2. Comment additionne et soustraire deux nombres rationnels dans le cas où ils ont un même dénominateur ou de dénominateurs différents, particulièrement lorsqu'un dénominateur est un multiple de l'autre;

3. L'opposé d'un nombre rationnel.

Exercices résolus

1. L'exercice montre comment rendre au même dénominateur des fractions en choisissant le plus petit dénominateur possible. Par exemple pour calculer $\frac{7}{6}+\frac{3}{4}$, on choisit le dénominateur commun 12 au lieu de 6x4, ainsi $\frac{7}{6}+\frac{3}{4} = \frac{14}{12}+\frac{9}{4} = \frac{23}{12}$.

2. L'exercice 2 aborde la soustraction de deux fractions, directement ou en inversant la place des deux termes : $-\frac{7}{6}+\frac{3}{4} = -\frac{28}{24}+\frac{18}{24} = -\frac{10}{24} = -\frac{5}{12}$

Ou bien $-\frac{7}{6}+\frac{3}{4} = \frac{3}{4} + \frac{-7}{6} = \frac{3}{4} - \frac{7}{6} = \frac{18}{24} - \frac{28}{24} = -\frac{10}{24} = -\frac{5}{12}$

3. L'exercice 3 aborde le calcul de $-\frac{4}{3}$ +1 de deux façons : directement ou en inversant la place des deux termes :

$-\frac{4}{3} +1 = -\frac{4}{3} +\frac{3}{3} = -\frac{1}{3}$

Ou bien $-\frac{4}{3} +1 = 1+ \frac{-4}{3} = 1 - \frac{4}{3} +1= \frac{3}{3} - \frac{4}{3} = -\frac{1}{3}$.

4. Dans cette exercice on effectue des opérations sur des expressions où figurent des additions et des soustractions : $A = \frac{5}{3} - \frac{7}{6} + \frac{3}{8}$ et $B = \frac{5}{3} - (\frac{7}{6} + \frac{3}{8})$

Pour calculer A :

On commence par grouper les termes positifs : $\frac{5}{3} + \frac{3}{8} = \frac{49}{24}$

D'où $A = \frac{49}{24} - \frac{7}{6} = \frac{49}{24} - \frac{28}{24} = \frac{21}{24}$.

Pour calculer B :

On commence par calculer : $\frac{7}{6} + \frac{3}{8} = \frac{28}{24} + \frac{9}{24} = \frac{37}{24}$

Donc $B = \frac{5}{3} - \frac{37}{24} = \frac{40}{24} - \frac{37}{24} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$.

Exercices et problèmes

Exercice 3

a) $\frac{3}{5} = \frac{3x3}{5x3} = \frac{9}{15}$

b) $\frac{3}{5} + \frac{2}{15} = \frac{9}{15} + \frac{2}{15} = \frac{11}{15}$

Exercice 12

a) le premier multiple non nul de 24 et de 18 est 72 puisque 72 = 3x24 et 72 = 4x18.

b) $\frac{13}{24} + \frac{5}{18} = \frac{13x3}{24x3} + \frac{5x4}{18x4} = \frac{39}{72} + \frac{20}{72} = \frac{59}{72}$

Exercice 16

a) La division euclidienne de 16 par 5 : 16 = (3x5) + 1 le quotient est 3 et le reste est 1.

D'où $\frac{16}{5} = \frac{3x5}{5} + \frac{1}{5} = 3 + \frac{1}{5}$.

b) Sur la droite graduée, le point A a pour abscisse $(3 + \frac{1}{5})$ c'est-à-dire 3,2.

Exercice 20

a) $\frac{21}{45} + \frac{28}{60} = \frac{7}{15} + \frac{7}{15} = \frac{14}{15}$

b) $\frac{26}{12} + \frac{3}{18} = \frac{13}{6} + \frac{1}{6} = \frac{14}{6} = \frac{7}{3}$

c) $\frac{78}{40} + \frac{75}{100} = \frac{39}{20} + \frac{15}{20} = \frac{54}{20} = \frac{27}{10}$

Exercice 26

a) $\frac{1}{9} - \frac{1}{6} = \frac{2}{18} - \frac{3}{18} = -\frac{1}{18}$

b) $\frac{7}{12} + \frac{5}{18} = \frac{21}{36} + \frac{10}{36} = \frac{31}{36}$

c) $-\frac{20}{12} + \frac{2}{3} = -\frac{20}{12} + \frac{8}{12} = -\frac{12}{12} = -1$

Exercice 30

a) $\frac{3}{2} - \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1$; $\frac{5}{4} - \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1$

b) $\frac{11}{3} - \frac{5}{3} = \frac{6}{3} = 2$; $\frac{11}{3} - \frac{107}{30} = \frac{110}{30} - \frac{107}{30} = \frac{3}{30} = \frac{1}{10}$

c) $... - \frac{2}{3} = \frac{3}{4}$ c'est-à-dire $... - \frac{8}{12} = \frac{9}{12}$ donc $... = \frac{17}{12}$

Donc $\frac{17}{12} - \frac{2}{3} = \frac{3}{4}$.

Exercice 37

a) $\frac{4}{3} - (\frac{4}{7} - \frac{11}{7}) = \frac{4}{3} - (-\frac{7}{7}) = \frac{4}{3} - (-1) = \frac{4}{3} + 1 = \frac{4}{3} + \frac{3}{3} = \frac{7}{3}$ (on n'enlève pas les parenthèses)

b) $7/11 - (-\frac{4}{11} + \frac{2}{3}) = \frac{7}{11} + \frac{4}{11} - \frac{2}{3} = \frac{11}{11} - \frac{2}{3} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{3}{3} - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ (on enlève les parenthèses)

QCM pour s'évaluer.

Ce QCM permet aux élèves de vérifier leur degré d'acquisition des notions traitées dans la leçon, les opérations d'addition et de soustraction des nombres rationnels et l'application des différentes méthodes et techniques de calcul.

Répondre correctement aux items du QCM est un indice de l'atteinte par les élèves des objectifs de la leçon. Des erreurs ou des difficultés pour répondre à ces items doivent inciter les élèves à revoir leurs cours, approfondir leur compréhension. L'enseignant doit aussi tirer profit de ce QCM pour réguler son enseignement et prévoir des activités de remédiation et de renforcement des acquis de ses élèves.

4 Nombres rationnels : Produit et division

Comme l'addition et la soustraction, la multiplication et la division des nombres rationnels sont deux notions de première importance. Une erreur souvent commise par les élèves est de rendre au même dénominateur les deux nombres rationnels à multiplier. Les élèves ont aussi une difficulté à multiplier un nombre rationnel par un entier ne concevant pas ce dernier comme un nombre rationnel de dénominateur 1. La division est aussi une opération délicate mettant en jeu l'inverse d'une fraction.

Objectifs d'apprentissage

- Connaître les règles de multiplication et de division des nombres rationnels ;
- Savoir multiplier des nombres rationnels ;
- Savoir diviser des nombres rationnels ;
- Déterminer le signe du produit et du quotient de deux nombres rationnels.

Je vérifie mes prérequis

Ce QCM vérifie la maitrise des élèves des opérations sur les fractions ; largement abordés dans les années précédentes, et permet de diagnostiquer des erreurs fréquentes comme celle de rendre au même dénominateur lorsqu'on multiplie deux fractions. La difficulté aussi réside dans la division de deux fractions.

Activités de découverte

Activité 1

Dans cette activité on aborde le produit de deux nombres rationnels en utilisant un contexte imagé : un rectangle avec carreaux rectangulaires.

1) Le calcul de l'aire de la partie coloriée de deux façons : Dans la première on détermine le quotient des carreaux coloriés par l'ensemble des carreaux donc 8/15 et dans la deuxième on calcule l'aire du rectangle colorié, à savoir $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$

On aboutit à l'égalité: $\frac{4}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{15}$.

2) De cet exemple générique on induit la règle générale de multiplication de deux nombres rationnels : multiplier les deux numérateurs et les deux dénominateurs.

3) dans cette question on s'assure de la règle induite à l'aide d'un calcul de produit de deux nombres rationnels à l'aide d'une calculatrice.

4) dans cette question les élèves s'exercent sur le calcul rapide de produits de nombres rationnels.

Activité 2

Cette activité fait fonctionner le produit de deux fractions dans le cadre d'un problème.L'après-midi, Sara a bu $1-(\frac{1}{5}+\frac{2}{3}) = 1-(\frac{3}{15}+\frac{10}{15}) = 1-\frac{13}{15} = \frac{15}{15}-\frac{13}{15} = \frac{2}{15}$

Donc Sara a bu l'après-midi $\frac{2}{15}$ du contenu de la bouteille,

soit $\frac{2}{15}$ x 1,5 litre = $\frac{2}{15} \text{ x } \frac{3}{2}$ litre = $\frac{3}{15}$ litre = $\frac{1}{5}$ litre = 0,2 litre.

Activité 3

Dans cette activité il s'agit de calculer des fractions sur la contenance et de les comparer

1) Karim boit : $\frac{3}{5} \text{ x } 1{,}5 = \frac{3}{5} \text{ x } \frac{15}{10} = \frac{9}{10}$ litre $= \frac{18}{20}$ litre

Amine boit : $\frac{4}{5} \text{ x} \frac{3}{4} \text{ x } 0{,}5 = \frac{3}{5} \text{ x} \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$ litre $= \frac{6}{20}$ litre

Khadija boit : $(\frac{2}{5} \text{ x} 1) + \frac{1}{4} \text{ x } (1-\frac{2}{5}) = \frac{2}{5} + \frac{1}{4} \text{ x} \frac{3}{5} = \frac{2}{5} + \frac{3}{20} = \frac{8}{20} + \frac{3}{20} = \frac{11}{20}$ litre.

Amine est celui qui a bu le moins pendant la course.

2) Donc Karim boit 0,9 litre

Amine boit 0,3 litre

Khadija boit 0,55 litre

Activité 4

Dans cette activité on aborde l'inverse d'un nombre rationnel.

1) Le carré a pour aire 1 unité. Donc son côté a est tel que axa = 1 donc a = 1.

2) il s'agit de trouver, selon le cas, la largeur ou bien la longueur du rectangle, connaissant son aire et sa longueur ou bien sa largeur. Pour cela on commence par l'égalité L x ℓ = 1 (qui signifie que L et ℓ sont inverses l'un de l'autre).

Donc $\ell = \frac{1}{L}$ ou bien $L = \frac{1}{\ell}$

On déduit de cette activité que l'inverse de x est $\frac{1}{x}$ et que l'inverse $\frac{a}{b}$ est $\frac{b}{a}$.

Activité 5

Dans cette activité, on aborde le quotient de deux nombres rationnels :

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{d}{c}} = \frac{a}{b} \text{ x } \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

Et on en induit la règle : Diviser par une fraction, c'est multiplier par son inverse.

Exemple pour diviser $\frac{3}{2}$ par $\frac{5}{3}$ on effectue : $\frac{3}{2} \text{ x } \frac{3}{5} = \frac{9}{10}$.

Cours

Des activités traitées, l'élève doit retenir :

1. La règle de multiplication des nombres rationnels : multiplier les deux numérateurs et les deux dénominateurs : $\frac{a}{b} \text{ x } \frac{c}{d} = \frac{a\text{x}c}{b\text{x}d}$.En particulier $\frac{a}{b} \text{ x } c = \frac{ac}{b}$.

2. L'inverse d'un nombre rationnel $\frac{a}{b}$ c'est $\frac{b}{a}$ et qu'un nombre rationnel et son inverse ont même signe.
3. Diviser par une un nombre rationnel non nul, c'est multiplier par son inverse :

   $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$.
4. Ce que signifie réduire au même dénominateur des fractions.
5. Comment additionne et soustraire deux nombres rationnels dans le cas où ils ont un même dénominateur ou des dénominateurs différents, particulièrement lorsqu'un dénominateur est un multiple de l'autre.
6. L'opposé d'un nombre rationnel.

Exercices résolus

Exercice 1

On montre comment calculer le produit de nombres rationnels, en veillant à simplifier les nombres avant d'effectuer la multiplication ou à simplifier le résultat de la multiplication :

- Première méthode : on simplifie après le calcul :

$\frac{6}{35} \times \frac{25}{4} = \frac{6x25}{35x4} = \frac{150}{140} = \frac{15}{14}$ (on simplifie par 10)

- Deuxième méthode : on simplifie d'abord les nombres en jeu avant de calculer:

$\frac{6}{35} \times \frac{25}{4} = \frac{6x25}{35x4} = \frac{3x5}{7x2}$ (on simplifie par 2 les nombres 6 et 4 et par 5 les nombres 25 et 35).

Donc $\frac{6}{35} \times \frac{25}{4} = \frac{15}{14}$.

Exercice 2

Dans cet exercice, on veut calculer $\frac{14}{9} \times \frac{-6}{7}$, on a des nombres de signes différents, le produit de deux nombre est donc négatif. Puis on effectue le produit et on simplifie :

$\frac{14}{9} \times \frac{6}{7} = \frac{14x6}{9x7}$

On simplifie 14 et 7 par 7 et – et 9 par 3

Ce qui donne $\frac{14}{9} \times \frac{6}{7} = 2 \times \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$

Finalement $\frac{14}{9} \times \frac{6}{7} = - \frac{4}{3}$.

Exercice 3

Il s'agit d'effectuer la division de nombres rationnels : $- \frac{2}{5} : \frac{7}{3}$

D'abord on détermine le signe du quotient : il est négatif car les deux fractions sont de signes contraires.

Puis on applique ka règle de la division : $\frac{2}{5} : \frac{7}{3} = \frac{2}{5} \times \frac{3}{7} = \frac{2x3}{5x7} = \frac{6}{35}$ finalement :

$- \frac{2}{5} : \frac{7}{3} = - \frac{6}{35}$.

Exercice 4

Dans cet exercice on traite un calcul où figurent un produit et une addition ou une soustraction:

A= $-\frac{4}{3} \times \frac{9}{7} + \frac{2}{3}$ et B= $\frac{3}{4} - 14 : \frac{16}{3}$

Pour calculer A on commence par calculer le produit $-\frac{4}{3} \times \frac{9}{7} = -\frac{36}{21} = -\frac{12}{7}$

Donc A= $-\frac{12}{7} + \frac{2}{3} = -12 \times \frac{3}{21} + 2 \times \frac{7}{21} = \frac{(-36+14)}{21} = -\frac{22}{21}$

Pour calculer B, on effectue d'abord la division : $14 : \frac{16}{3} = 14 \times \frac{3}{16} = \frac{21}{8}$

Puis on a B= $\frac{3}{4} - \frac{21}{8} = \frac{6}{8} - \frac{21}{8} = -\frac{15}{8}$.

Exercices et problèmes

Exercice 1

a) $\frac{3}{4} \times 7 = \frac{3 \times 7}{4} = \frac{21}{4}$

b) $\frac{1}{2} \times 3 = \frac{1 \times 3}{2} = \frac{3}{2}$

c) $5 \times \frac{3}{7} = \frac{15}{7}$

Exercice 6

a) $\frac{17}{8} \times \frac{8}{7} = \frac{17x8}{8x7} = \frac{17}{7}$ (on simplifie par 8)

b) $\frac{14}{5} \times \frac{9}{7} = \frac{14x9}{5x7} = 2 \times \frac{9}{5} = \frac{18}{5}$ (on simplifie par 9)

$\frac{7}{24} \times \frac{8}{5} = \frac{7x8}{24x5} = \frac{7}{3} \times 5 = \frac{7}{15}$ (on simplifie par 8).

Exercice 20

a) $\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$

b) $\frac{22}{3} = \frac{4}{3}$

c) $\left(\frac{-4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$

Exercice 24

a) $-\frac{1}{3}(\frac{t}{3} - \frac{3}{5}) = -\frac{t}{9} + \frac{3}{3x5} = -\frac{t}{9} + \frac{1}{5}$

b) $-\frac{2}{5}(\frac{3}{3}x - \frac{5}{2}) = -\frac{2}{5}x + \frac{2x5}{5x2} = -\frac{2}{5}x + 1$

Exercice 28

a) $\frac{14-3}{3x4} - \frac{5}{(5x5)-1} = \frac{11}{12} - \frac{5}{24} = \frac{22}{24} - \frac{5}{24} = \frac{17}{24}$

b) $\frac{17+3}{11} x \frac{23-12}{20} + \frac{1}{2} = \frac{20}{11} \times \frac{11}{20} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

Exercice 30

a) $\frac{3}{2} - \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1$; $\frac{5}{4} - \frac{1}{4} = \frac{4}{1} = 1$

c) $.... - \frac{2}{3} = \frac{3}{4}$ c'est-à-dire $... - \frac{8}{12} = \frac{9}{12}$ donc ? $= \frac{17}{12}$

Donc $\frac{17}{12} - \frac{2}{3} = \frac{3}{4}$.

Exercice 36

Le quotient de $\frac{7}{5}$ par $\frac{2}{3}$ est D= $\frac{7}{5} \times \frac{3}{4}$

Exercice 40

A $= \frac{7}{\frac{2}{3}} = 7 \times \frac{3}{2} = \frac{21}{2}$ **B** $= \frac{\frac{7}{2}}{3} = \frac{7}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{7}{6}$ **C** $= \frac{\frac{2}{11}}{6} = \frac{2}{11} \times \frac{1}{6} = \frac{2}{66} = \frac{1}{33}$

D $= \frac{-15}{\frac{8}{3}} = -15 \times \frac{3}{8} = -\frac{45}{8}$.

Exercice 45

1) la fraction du reste est $1 - \frac{2}{5} = \frac{5}{5} - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$

2) Amine a mangé $\frac{5}{8} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{8}$

3) les deux enfants ont mangé $\frac{2}{5} + \frac{3}{8} = \frac{16}{40} + \frac{15}{40} = \frac{31}{40}$ du gâteau

Il reste donc après le goûter, $1 - \frac{31}{40} = \frac{40}{40} - \frac{31}{40} = \frac{9}{40}$.

D'où la masse du gâteau restant est : 9/40 x 2,1 kg= $\frac{18,9}{40}$ kg

Exercice 46

Salma a dépensé $\frac{1}{4} \times \frac{2}{3}$ de ses économies soit $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ de ses économies.

Exercice 48

On peut procéder de différentes façons.

Par exemple : les 5/6 sont parcourues en 45 minutes donc le $\frac{1}{6}$ est parcouru en $\frac{45}{6} = 9$ minutes (proportionnalité).

La moitié du trajet c'est la fraction $\frac{1}{2}$ qui est aussi $\frac{3}{6} = 3 \times \frac{1}{6}$. Donc cette moitié est parcourue en 9 x 3 = 27 minutes.

Le tiers du trajet est $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = 2 \times \frac{1}{6}$.

Donc le temps pour parcourir le tiers du trajet est 2x9 = 18 minutes

QCM pour s'évaluer.

Ce QCM permet aux élèves de vérifier leur degré d'acquisition des notions traitées dans la leçon (l'inverse d'un nombre rationnel, le produit et la division de nombres rationnels,

Répondre correctement aux items du QCM est un indice de l'atteinte par les élèves des objectifs de la leçon. Des erreurs ou des difficultés dans les réponses à ces items doivent inciter les élèves à revoir leurs cours, approfondir leur compréhension. L'enseignant doit aussi tirer profit de ce QCM pour réguler son enseignement et prévoir des activités de remédiation et de renforcement des acquis de ses élèves.

5 Puissances d’un nombre rationnel

En première année du collège, les élèves ont étudié la puissance des nombres relatifs. Cette leçon vise à ce que les élèves acquièrent la notion de puissance d’un nombre rationnel.

L’utilisation des propriétés est prioritaire. Les élèves doivent aussi connaître l’écriture scientifique des nombres.

Objectifs d’apprentissage

- Connaître et utiliser la puissance positive d’un nombre relatif ;
- Connaître et utiliser la puissance négative d’un nombre relatif ;
- Connaître et utiliser la puissance positive d’un nombre rationnel ;
- Connaître et utiliser la puissance négative d’un nombre rationnel ;
- Connaître et utiliser l’écriture scientifique.

Je vérifie mes prérequis

Ce QCM vérifie la maîtrise des élèves de la signification des formules des puissances d’un nombre relatif et permet de diagnostiquer des erreurs souvent dues à des confusions dans les différentes formules et leur utilisation inappropriée, comme par exemple $a^n + a^m = a^{n+m}$

Activités de découverte

Activité 1

Cette activité investit la notion de puissance (puissances de 2) dans un contexte biologique : fécondation d’un œuf.

à la $10^{ème}$ division, le nombre de cellules est 2x2x2….x2 dix fois soit 2^{10}

à la $15^{ème}$ division, le nombre de cellules est 2^{15}

à la $21^{ème}$ division, le nombre de cellules est 22^1

Activité 2

dans un contexte informatique, réception de spams,

a) on calcule le nombre de spams reçus par Manal : la deuxième semaine elle reçoit 4x4 spams; à la troisième semaine elle reçoit 4x4x4 spams.

b) le nombre de spams reçus à la cinquième semaine est 4x4x4x4x4

c) Manal reçoit plus de 10 000 spam à la $n^{ème}$ semaine tel que $4^n>10\ 000$
En calculant les puissances successifs de 4 on trouve que n est supérieur ou égal à 7

Activité 3

a) les expressions permettant de déterminer le nombre d’abeilles qui viendront butiner le $9^{ème}$ jour sont : 3^9 ; 3^6x3^3 ; 3^2x3^7 ; 3^7x3^2 ; $3x3^8$.

b) a^2xa^3 = (axa)x(axaxa)=axaxaxaxa = a^5
a^4xa =(axaxaxa)xa= axaxaxaxa=a^5.

Activité 4

a) $10^0 = 1$; $10^1 = 10$; $10^3 = 1000$; $10^5 = 100000$; $10^{-1} = 0{,}1\ 0$; $10^{-2} = 0{,}01$.

b) $1\,000\,000\,000 = 10^9$

$0{,}0001 = 10^{-4}$

$100\,000 = 10^5$

$0{,}000001 = 10^{-6}$

Activité 5

1) et **2)** A travers ces deux questions, on établit sur des exemples génériques les formules des puissances :

$10^n x 10^m = 10^{n+m}$, que l'on vérifie à l'aide de la calculatrice dans la question **3)**

4) De ce qui précède on émet la conjecture $10^n\ x10^m = 10^{n+m}$

Activité 6

1) Il s'agit de calculer sous forme de puissance le volume V d'un cube d'arête 10^5mm.

$V = 10^5 x 10^5 x 10^5 = 10^{15} = (10^5)^3$

2) $(10^4)^5 = 10^4 x 10^4 x\ 10^4 x 10^4 x 10^4 = 10^{20}$

$(10^{-2})^3 = 10^{-2} x 10^{-2} x 10^{-2} = 10^{-6}$

3) De ce qui précède on émet la conjecture : $(10^m)^n = 10^{mn}$.

Activité 7

1) La distance entre le Soleil et la planète Mars est $228{,}9\ x10^6$ km $= 2{,}289x10^8$ km (écriture scientifique).

La distance entre le soleil et la Terre est $1{,}5x10^8$ km

En comparant les deux nombres : $2{,}289 > 1{,}5$ on en déduit que la Terre est plus proche du Soleil que Mars.

Cours

Des activités traitées, l'élève doit retenir :

1. La définition de la puissance d'un nombre rationnel : $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a}{b} x \frac{a}{b} x .... x \frac{a}{b}$ n fois.

En particulier pour le nombre 10 : $10^n = 1\ 00.....0$: n zéros.

2. Connaître le signe d'une puissance d'un nombre négatif selon la parité de n : si n est impaire a^n est négatif ; si n est pair a^n est positif.

3. Connaître les formules des puissances : $a^n\ x\ a^p = = a^{n+p}$ et $(ab)^n = a^n b^n$ et $(a^n)^p = a^{np}$

et $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

4. L'écriture scientifique d'un nombre décimal relatif $x = ax10^n$ où a est nombre relatif à un seul chiffre non nul avant la virgule et n un entier relatif.

Exemple $15x10^8 = 1{,}5\ x\ 10^9$.

Exercices résolus

Exercice 1

1) a) Lorsqu'une expression avec des puissances comprend des parenthèses on commence par calculer ce qui est entre parenthèses :

$A= (5x4)^3 = 20^3 = 8000;$

$B = 5x4^3$(ici la puissance porte sur 4 uniquement : on peut écrire $B= 5 x(4^3)$)

$B = 5 x 64 = 320$

$C= 5x^3 +6x^2 -10$ avec $x = -4$

$C= 5x(-4)^3 +6 x(-4)^2 -10=5x (-64) + 6x16 -10= -320+96-10 = -234.$

Exercice 2

Cet exercice est une application des formules des puissances du nombre 10.

$10^7x10^5 = 10^{7+5}= 10^{12}$

$\frac{10^7}{10^5} = 10^{7-5}= 10^2$

$(10^7)^5 =10^{7x5} = 10^{35}$

Exercice 3

a) $2715x10^{\ 9} = 2715 x10^{-5+14}= 2715 x 10^{-5} x10^{14} = 0,02715x10^{14}$

b) $0,075x10^{-22} = 7,5 x10^{-2}x10^{-22}= 7,5x10^{-24}$

Exercices et problèmes

Exercice 3

$7x7x7x7 =7^4$

$2+2+2+2= 4x2 = 2x2x2 = 2^3$

$5+5+5+5+5 =5x5 =5^2$

$4x5x4x5x4x5= (4x5)^3= 20^3$

Exercice 6

a) $27 = 3^3$

b) $81 = 3^4$

c) $125= 5^3$

d) $81 = 9^2$

Exercice 20

a) $\frac{1}{7x7x7} = 7^{-3}$

b) $\frac{1}{3x3x3x3x3} = 3^{-5}$

c) $\frac{1}{(-6)x(-6)x(-6)x(-6)} = (-6)-4$

d) $\frac{1}{(-5)x(-5)x(-5)} = (-5)^{-3}$

Exercice 27

a) A= $\frac{2x2x2}{5x5x5x5} = 2^3x5^{-4}$

B= $\frac{25}{16} = \frac{5^2}{2^4} = 5^2x2^{-4}$

Exercice 41

a) $100=10^2$; **b)** $0,001= 10^{-3}$ **c)** $\frac{1}{10000} = 10^{-4}$; **d)** $\frac{1}{100} = 10^{-2}$ **e)** un million = 10^6

f) un milliard = 10^9 **g)** un millième = 10^{-3} **h)** un millionième = 10^{-6} **i)** un dixième = 10^{-1}.

Exercice 51

a) $127,85x\ 10^2 = 12785$

b) $46,147x10^3= 46147$

c) $0,04x10^3= 4000$

d) $0,027x\ 10^2 = 2,7$

Exercice 53

Ecriture scientifique :

Pour A non car la partie entière 83 comprend deux chiffrees

Pour B non car 0,24 est inférieur à 1

Pour C oui car la partie entière est 2

Pour D oui car la partie entière est 9

Exercice 54

$A= \frac{3x10^{-4}x5x(10^2)6}{25x10^{-2}} = \frac{3x5x\ 10^{-4}\ x10^{12}}{25x10^{-2}} = \frac{15x\ 10^8}{25x10^{-2}} = \frac{15}{25}\ x\ 10^8 x\ 10^2$

$A= \frac{3}{5}x10^{10}= 0,6x10^{10} = 6x10^9$

QCM pour s'évaluer.

Ce QCM permet aux élèves de vérifier leur degré d'acquisition des notions traitées dans la leçon (concepts, techniques, règles, formules…) :puissance d'un nombre rationnel ; propriétés des puissances, puissances de 10 et ses propriétés.

Répondre correctement aux items du QCM est un indice de l'atteinte par les élèves des objectifs de la leçon. Des erreurs ou des difficultés dans les réponses à ces items doivent inciter les élèves à revoir leurs cours, approfondir leur compréhension. L'enseignant doit aussi tirer profit de ce QCM pour réguler son enseignement et prévoir des activités de remédiation et de renforcement des acquis de ses élèves.

6 Symétrie axiale

En première année du collège, a été abordée la notion de symétrie centrale qui met en jeu la notion de milieu d'un segment et d'équidistance de points. La symétrie axiale traitée dans cette leçon met en jeu la notion de perpendicularité et d'équidistance de points.

Plusieurs erreurs et difficultés apparaissent chez les élèves en rapport avec la symétrie axiale. En effet, certains élèves n'arrivent pas à mobiliser des images mentales de pliage ou de construction de symétrique. Beaucoup d'élèves s'appuient sur le théorème-élève suivant: Un axe de symétrie d'une figure passe par le «milieu» de cette figure. Autre théorème-élève classique : L'axe de symétrie doit partager la figure en deux parties superposables. Par ailleurs, les élèves privilégient certaines directions, en particulier les axes verticaux ou horizontaux sont plus facilement repérés comme des axes de symétrie. En conséquence :

- dans le cas d'une figure présentant plusieurs axes de symétrie, les élèves ne repèrent que l'axe horizontal ou vertical s'il existe.
- Si une figure ayant un axe de symétrie est représentée de telle sorte que cet axe ne soit ni horizontal, ni vertical, beaucoup d'élèves estimeront que la figure n'admet pas d'axe de symétrie.
- Dans certains cas, il peut aussi y avoir un phénomène de contrat qui amène l'élève à penser qu'il y a au maximum un axe de symétrie par figure (règle induite par les exercices proposés).

Pour remédier à ces difficultés et erreurs, l'enseignant doit varier les situations (variables didactiques): position de l'axe de symétrie, nature de la figure, sa position par rapport à l'axe de symétrie (voir analyse didactique en première partie du guide).

Objectifs d'apprentissage

- Construire le symétrique d'un point, d'un segment, d'une demi-droite, d'une droite, d'un cercle par une symétrie axiale ;
- Construire l'axe de symétrie d'une figure ;
- Construire le symétrique d'une figure par rapport à une droite ;
- Connaître et utiliser les propriétés de conservation de la symétrie axiale.

Je vérifie mes prérequis

Ce QCM vérifie la maîtrise des élèves de quelques apprentissages de géométrie préliminaire à la notion de symétrie : pliage, symétrique d'une figure, médiatrice d'un segment.

Activités de découverte

Les deux premières activités abordent la notion de symétrie axiale selon une approche expérimentale (pliage, calque).

Activité 1

Cette activité approche la notion de symétrique d'une figure selon un axe par pliage.

Activité 2

Dans cette activité, l'apprenant est amené à tracer à main levée le symétrique d'une figure par rapport à un axe et de valider son résultat à l'aide du papier calque.

Activité 3

Dans cette activité on aborde des erreurs en rapport avec la symétrie axiale. Les élèves doivent relever ces erreurs et les expliquer.

Cette activité permet de pointer les conceptions erronées dans la perception et d'y remédier au cours de la leçon.

Activité 4

Dans cette activité, on aborde la notion de symétrique d'un point par rapport à un axe et les propriétés conservées par la symétrie axiale (distance, mesure d'angles).

Activité 5

a) Il s'agit dans cette question de tracer le symétrique d'une figure par rapport à un axe sur papier quadrillé

b) Dans cette question il s'agit d'identifier le symétrique d'une figure par rapport à un axe parmi plusieurs figures données. Ce qui exige de l'apprenant de faire l'analyse des différentes figures et de se baser sur les éléments caractéristique de la symétrie axiale (ressemblance de forme, équidistance, conservation des mesures des angles…) pour choisir la figure adéquate.

Activité 6

Cette activité porte sur les axes de symétrie de figures usuelles ; triangles, quadrilatères et cercle.

Cours

Des activités traitées, l'élève doit retenir :

1. La perception de deux figures symétriques : quand elles se superposent par pliage selon l'axe considéré
2. La signification de l'axe de symétrie d'une figure ; la figure est son propre symétrique par la symétrie par rapport à cet axe
3. La conservation des dimensions et de l'aire des figures par une symétrie axiale
4. Le symétrique M' d'un point M par rapport à un axe : c'est le point tel que l'axe de symétrie est médiatrice du segment MM' (un point sur l'axe est son propre symétrique)
5. Le symétrique des figures usuelles (droite, segment, cercle…), d'un angle
6. Conservation des distances, du milieu, de la mesure des angles par une symétrie axiale
7. Les axes de symétrie des figures usuelles : (triangles isocèle et équilatéral), losange, rectangle, carré, cercle

Exercices résolus

Ces exercices traitent des méthodes de constructions géométriques à l'aide d'insruments géométriques.

Exercice 1

Cet exercice présente la méthode de construction de la médiatrice d'un segment à l'aide d'une règle graduée et de l'équerre.

Exercice 2

Cet exercice présente la méthode de construction de la médiatrice d'un segment à l'aide du compas et d'une règle non graduée.

Exercice 3

Cet exercice présente la méthode de construction de la bissectrice d'un angle à l'aide du compas et d'une règle non graduée.

Exercice 4

Dans cet exercice il s'agit de tracer le symétrique d'un triangle et d'une droite par rapport à un axe de symétrie. Pour le triangle il suffit de tracer les symétriques des sommets du triangle et de les joindre et pour la droite, il suffit de tracer les symétriques de deux points distincts quelconques de cette droite et de les joindre.

Exercice 5

Dans cet exercice on s'éloigne un peu de la forme habituelle des exercices (figure et droite comme axe de symétrie) en demandant de tracer le symétrique d'un sommet d'un triangle par rapport à la droite passant par les deux autres sommets.

La forme du triangle permet aussi de vérifier si les élèves prolongent la droite (BC) au-delà du segment [BC] ou bien ils ne le font pas et tracent des symétriques faux.

Exercice 6

Dans cet exercice on demande de tracer le symétrique d'une figure composée de deux cercles concourants. Les élèves doivent d'abord identifier cet axe de symétrie et le tracer comme médiatrice du segment joignant les deux points de concours des deux cercles.

Exercice 7

Dans cet exercice on trace un losange dont les longueurs des deux diagonales sont données.

Exercices et problèmes

Exercice 2

a) par exemple les sommets des toits des deux maisons ne sont pas à même distance de l'axe
b) les deux figures n'ont pas les mêmes dimensions
c) par exemple la droite passant par les sommets des toits des deux maisons n'est pas perpendiculaire à l'axe
d) par exemple les sommets des toits des deux maisons ne sont pas à même distance de l'axe

Exercice 10

La figue 1 a un axe de symétrie horizontal, la figure 3 a quatre axes de symétrie

Exercice 15

(GH) est la médiatrice de [EF]

(CD) est la médiatrice de [KL]

(DC) est la médiatrice de [MN]

Exercice 16

(a) faux; **b)** faux; **c)** vrai; **d)** vrai.

Exercice 17

a) le point A a pour symétrique le point D

Exercice 22

figure 2 et figure 3

Exercice 17

Cercle vert

Exercice 39

Le programme de construction;

- Tracer un triangle GEF;
- Tracer la médiatrice du segment [EG];
- Tracer la bissectrice de l'angle $\widehat{FEH}$;
- Le point de rencontre de cette médiatrice et de cette bissectrice est le point K;
- Tracer la demi-droite (GK).

QCM pour s'évaluer.

Ce QCM permet aux élèves de vérifier leur degré d'acquisition des notions traitées dans la leçon (concepts, propriétés ,techniques de construction…) :symétriue d'un poin,t, d'une figure, axe de symétrie d'une figure, propriétés de conservation…

Répondre correctement aux items du QCM est un indice de l'atteinte par les élèves des objectifs de la leçon. Des erreurs ou des difficultés dans les réponses à ces items doivent inciter les élèves à revoir leurs cours, approfondir leur compréhension. L'enseignant doit aussi tirer profit de ce QCM pour réguler son enseignement et prévoir des activités de remédiation et de renforcement des acquis de ses élèves.

7 Droites remarquables dans un triangle

En plus de consolider les notions en rapport avec le triangle et ses droites remarquables traitées en première année du collège (médiatrice, orthocentre, bissectrice, hauteur, cercles inscrit et circonscrit), cette leçon aborde les notions nouvelles de médiane dans un triangle et de centre de gravité.

Objectifs d'apprentissage

- Connaître, utiliser et maitriser la définition de la médiatrice et caractériser ses points par la propriété d'équidistance ;
- Construire le cercle circonscrit à un triangle ;
- Construire l'orthocentre d'un triangle ;
- Maîtriser le calcul de l'aire d'un triangle ;
- Connaître, utiliser et maîtriser la définition de la bissectrice d'un angle et la caractériser comme ensemble de points équidistants aux côtés de cet angle ;
- Construire le cercle inscrit à un triangle ;
- Connaître et utiliser la définition de la médiane d'un triangle ;
- Connaître et utiliser le centre de gravité d'un triangle.

Je vérifie mes prérequis

Ce QCM vérifie la maîtrise des élèves de quelques notions acquises comme la notion de hauteur, bissectrice et médiatrice dans un triangle.

Activités de découverte

Les activités de **1** à **5** portent sur les notions étudiées en première année du collège : médiatrice et orthocentre, hauteur, cercle inscrit, bissectrice.

L'objet de ces activités est de réinvestir ces notions, de les consolider et de les mobiliser chez les élèves.

Activité 6

Cette activité porte sur les nouvelles notions de médiane dans un triangle et du centre de gravité d'un triangle qui le point de concourt des trois médianes et qui vérifie les relations métriques $AG = \frac{1}{3}AK$, $BG = \frac{1}{3}BK$ et $CG = \frac{1}{3}CK$.

Cours

Des activités traitées, l'élève doit retenir :

1. Les notions de médiatrice, hauteur, orthocentre, bissectrice ; cercle circonscrit et cercle inscrit à un triangle
2. L'aire d'un triangle en fonction d'une hauteur
3. La notion de médiane d'un triangle
4. La notion de centre de gravité d'un triangle
5. Les formules faisant intervenir le centre de gravité ; $AG = \frac{1}{3}AK$, $BG = \frac{1}{3}BK$ et $CG = \frac{1}{3}CK$; $AG = \frac{2}{3}AA'$, $BG = \frac{2}{3}BB'$; $CG = \frac{2}{3}CC'$.
6. Les cas des triangles particuliers : triangle équilatéral : hauteur = médiane = médiatrice, triangle isocèle : hauteur = médiane = bissectrices (issues du sommet A, AB=AC)

Exercices résolus

1) L'exercice 1 montre comment tracer la médiatrice d'un segment à l'aide d'un compas et d'une règle
2) L'exercice 2 traite de la construction du cercle circonscrit à un triangle, en traçant deux médiatrices.
3) L'exercice 3 aborde la construction d'une hauteur d'un triangle à l'aide de l'équerre.
4) Dans cet exercice on développe une méthode de construction d'une bissectrice dans un triangle en se servant du fait que la bissectrice est un axe de symétrie de l'angle considéré et de la propriété de concourance des trois bissectrices d'un triangle.
5) Cet exercice investit la notion de bissectrice et la propriété qui dit que les points appartenant à la bissectrice d'un angle sont équidistants aux côtés de cet angle et inversement.
6) L'exercice 6 réinvestit les formules métriques mettant en jeu le centre de gravité.
7) L'exercice 7 réinvestit la définition du centre de gravité et les formules métriques mettant en jeu ce point.
8) **a)** (CI) médiane car elle passe par le milieu du segment AB et on $CI = \frac{2}{3}CG$ donc G est centre de gravité

   b) (CI) est une médiane car elle passe par le milieu du segment [AB] et [BO] est médiane car elle passe par le milieu O du segment AC (diagonale du parallélogramme). G est le point d'intersection de ces deux médianes donc c'est le centre de gravité.

Exercices et problèmes

Exercice 11

Puisque I et J sont milieux respectifs des segments [SR] et [RT] alors (SJ) et (TI) sont deux médianes. Elles se coupent en K. K est donc le centre de gravité du triangle RST. Et donc la troisième médiane est (RK) et par conséquent elle passe par le milieu du segment [TS].

Exercice 18

La droite (AD) n'est pas une hauteur du triangle ABC. En effet dans le triangle ACD, l'angle D mesure 180°-(43°+46°) = 91°. Donc l'angle D n'est pas droit. Ladroite (AD) n'est pas perpendiculaire à (BC).

Exercice 19

L'orthocentre du triangle ABH est le point H car (BH) et (CH) sont deux hauteurs de ce triangle. Or ils se coupent en H.

De même l'orthocentre du triangle AHC est le point H et l'orthocentre du triangle BCH est le point H.

Exercice 23

On prolonge la droite passant par A et le sommet de l'angle droit et la droite passant par B et par le sommet de l'autre angle droit. Elles se rencontrent en un point C.

Dans le triangle ABC, nous avons les deux hauteurs issues de A et B et se rencontrent en I. Il suffit donc de tracer la droite (CI) qui est la troisième hauteur et donc elle est perpendiculaire à la droite (AB).

Exercice 25

A et B appartiennent au cercle donc Puisque OA= OB c'est-à-dire que O est équidistant à A et B alors il appartient à la médiatrice du segment [AB].

Exercice 28

Puisque O est équidistant aux points A, B et C il est donc le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. Et donc O est le point de concours des trois médiatrices du triangle. On construit deux médiatrices à l'aide du compas et de la règle.

Exercice 30

M et N sont équidistants aux points A et B. Donc M et N appartiennent à la médiatrice du segment [AB], et puisque M et N sont distincts cette médiatrice est la droite (MN) par conséquent (MN) est perpendiculaire à (AB).

Exercice 31

(KJ) est bissectrice de l'angle $\widehat{HJI}$ et le quadrilatère EHJI est un rectangle, donc l'angle $\widehat{IJH}$ mesure 90°et alors l'angle $\widehat{KJH}$ mesure 90°/2= 45°

De même (HK) est bissectrice de l'angle $\widehat{EHJ}$ le quadrilatère EHJI est un rectangle, donc l'angle $\widehat{EHJ}$ mesure 90° donc l'angle $\widehat{KHJ}$ mesure $\frac{90°}{2} = 45°$

Donc si on considère le triangle HKJ, l'angle $\widehat{HKJ}$ mesure 180°-(45°+45°) = 90°.

Exercice 42

1) b) ABCD est un parallélogramme, donc O est milieu du segment [AC] la droite MO passe donc par le milieu du côté [AC] et donc c'est une médiane du triangle MAC.

QCM pour s'évaluer.

Ce QCM permet aux élèves de vérifier leur degré d'acquisition des notions traitées dans la leçon (concepts, techniques, règles, formules…) :droites dans le triangle, orthocentre, centre de gravité…

Répondre correctement aux items du QCM est un indice de l'atteinte par les élèves des objectifs de la leçon. Des erreurs ou des difficultés de répondes à ces items doivent inciter les élèves à revoir leurs cours, approfondir leur compréhension. L'enseignant doit aussi tirer profit de ce QCM pour réguler son enseignement et prévoir des activités de remédiation et de renforcement des acquis de ses élèves.

8 Triangles : milieux et parallèles

Cette leçon aborde des notions clés de la géométrie en rapport avec le triangle. Il s'agit des droites passant par les milieux des côtés d'un triangle et des propriétés en rapport avec ces droites. Ces propriétés abordées dans les années suivantes préfigurent le théorème de Thalès.

Objectifs d'apprentissage

- Connaître les théorèmes relatifs aux milieux de deux côtés d'un triangle et les utiliser pour :
- Démontrer que deux droites sont parallèles ;
- Calculer une longueur ;
- Montrer qu'un point est le milieu d'un segment.

Je vérifie mes prérequis

Ce QCM vérifie la maîtrise des élèves de quelques notions prérequises pour cette leçon comme la notion de milieu d'un segment et sa caractéristique métrique IA = IB ainsi que la proportionnalité.

Activités de découverte

Activité 1

Dans cette activité on montre que dans un triangle la droite passant par les milieux de deux côtés est parallèle au troisième côté.

Activité 2

Dans cette activité on montre que dans un triangle la droite passant par le milieu d'un côté et parallèle à un autre côté passe par le milieu du troisième côté.

Activité 3

Dans cette activité il s'agit d'entrainer les élèves sur la construction de points selon des proportions données par rapport à un segment.

Par exemple étant donné un segment [CD], construire un point R de ce segment qui vérifie $CR = \frac{1}{3} CD$.

Activité 4

Cette activité est une occasion de rappeler la notion de proportionnalité utile pour cette leçon.

Activité 5

Cette activité approche, sans le nommer, le théorème de Thalès, et ce de façon expérimentale.

Cours

Des activités traitées, l'élève doit retenir :

1. Dans un triangle la droite passant par les milieux de deux côtés est parallèle au troisième côté.
2. Dans un triangle la droite passant par le milieu d'un côté et parallèle à un autre côté passe par le milieu du troisième côté.
3. Dans un triangle la longueur du segment joignant les milieux de deux côtés est égale à la moitié de la longueur du troisième côté.
4. Dans un triangle si on coupe deux côtés par une parallèle au troisième côté alors on obtient deux triangles qui ont des côtés proportionnels.

Exercices résolus

1) L'exercice **1** montre comment poursuivre une démarche mathématique organisée pour résoudre un exercice sur les milieux et les parallèles dans un triangle, en argumentant les différentes étapes par des propriétés et des théorèmes étudiés dans le cours.

2) L'exercice **2** réinvestit les propriétés étudiées dans une figure autre que le triangle (trapèze).

3) Dans l'exercice **3** on applique la propriété de Thalès introduite implicitement dans ce cours.

4) Dans cet exercice on exploite les propriétés des droites qui passent par milieux et les formules métriques.

Exercices et problèmes

Exercice 3

On a [SR] est un diamètre du cercle donc U est milieu du segment [SR]. Et puisque V est milieu du segment [RT] alors dans le triangle RST, la droite (UV) qui passe par les milieux U et V est parallèle au troisième côté qui est [ST].

Exercice 4

PuisqueT' est le symétrique de S par rapport à U alors T est le milieu du segment [ST'].

U' est le symétrique de S par rapport à U donc U est le milieu du segment [SU'].

Donc dans le triangle SU'T', la droite (UT) passe par les milieux des deux côtés [ST'] et [SU']. Elle est donc parallèle à la droite (U'T').

Exercice 5

Puisque ABCD est un parallélogramme alors son centre O est milieu de la diagonale [BD].

Nous avons dans le triangle BCD, la droite (OI) passe par les milieux des côtés [DB] et [BC] ; elle est alors parallèle au troisième côté qui est [DC].

Exercice 8

On a $\frac{AI}{AB} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Et $\frac{AJ}{AC} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Donc $\frac{AI}{AB} = \frac{AJ}{AC}$

Et alors (IJ) est parallèle à (BC)

Exercice 16

On a S est le symétrique de I par rapport à J donc J est le milieu du segment [IS]. Dans le triangle IST, la droite (JK) passe par ce milieu J et est parallèle à (ST), donc elle passe par le milieu du troisième côté.

Exercice 18

a) On a IJKC est un parallélogramme donc la droite (IJ) est parallèle à la droite (CK). Dans le triangle ABC nous avons donc la droite (IJ) qui est parallèle au côté [BC] et qui passe par le milieu du côté [AC] donc elle passe par le milieu du troisième côté [AB]. Et par conséquent J est milieu du segment [AB].

b) on a O milieu du segment [BC] et les deux droites (JO) et (AC) sont parallèles car elles sont perpendiculaires à une même droite (AB). Donc (JO) passe par le milieu du segment [AB]. Donc J est milieu de [AB].

Exercice 29

a) Dans le triangle ABC la droite (MN) passe par les milieux des segments [AB] et [AC]. Elle est donc parallèle au côté [BC]. Et alors $MN = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}x5 = 2,5$ cm.

b) De même dans le triangle MNP $IJ = \frac{1}{2}MN$ donc $MN = 2IJ = 2x3,25 = 6,5$ cm.

Exercice 34

La droite (MN) passe par les milieux des côtés [AB] et [AC]. (MN) est donc parallèle à (BC).

Alors les deux angles $\widehat{AMN}$ et $\widehat{ABC}$ sont correspondants. Ils ont donc les mêmes mesures.

Exercice 36

a) On a M milieu de [AN] car N est le symétrique de A par rapport à M et O milieu de [AB]

Donc (MO) est parallèle à (NB)

D'où $MO = \frac{1}{2}BN$

$BN = 2MO = 2x\ 2 = 4$ (le rayon du cercle $= \frac{AB}{2} = \frac{4}{2} = 2$).

b) Comme AB= 4 alors BN = BA donc le triangle ABN est isocèle de sommet B.

Exercice 42

On (JK)// ((LM) donc : $\frac{IJ}{IL} = \frac{IK}{IM}$ et donc $\frac{2,5}{IL} = \frac{3}{12}$

$\frac{2,5}{IL} = \frac{1}{4}$ d'où IL = 4 x2,5= 10.

QCM pour s'évaluer.

Ce QCM permet aux élèves de vérifier leur degré d'acquisition des notions traitées dans la leçon (concepts, techniques, règles, formules…) :propriétés des droite de milieux, proportionnalité des côtés…

Répondre correctement aux items du QCM est un indice de l'atteinte par les élèves des objectifs de la leçon. Des erreurs ou des difficultés dans les réponses à ces items doivent inciter les élèves à revoir leurs cours, approfondir leur compréhension. L'enseignant doit aussi tirer profit de ce QCM pour réguler son enseignement et prévoir des activités de remédiation et de renforcement des acquis de ses élèves.

9 Calcul littéral

Le développement et la factorisation est une première entrée des élèves dans l'univers de l'algèbre. Ils commencent à avoir affaire au calcul littéral. La maîtrise de ces habiletés nécessite un exercice soutenu des techniques de calcul. Plusieurs erreurs apparaissent dans ce genre de calcul littéral. Ces erreurs émergent de l'interaction entre des difficultés en rapport avec le calcul numérique et la nouveauté du calcul littéral.

La maîtrise du développement et de la factorisation, particulièrement des identités remarquables constitue un gage de la maîtrise des équations.

Le passage à l'algèbre correspond à un accès à l'abstraction dont on ne doit pas minimiser la difficulté. L'apprentissage du calcul littéral se heurte de façon naturelle à un certain nombre d'obstacles.

- Les différentes significations du signe « égal »
- Les différents statuts de la lettre
- Les parenthèses

Les professeurs aideront d'autant mieux leurs élèves à les surmonter qu'ils en auront une connaissance fine (voir analyse du programme dans la première partie du guide).

Le calcul littéral (factorisation et développement des expressions algébriques) a été abordé de façon profonde en première année du collège. Cette leçon a pour objet la consolidation et l'enrichissement des acquis des élèves dans ce domaine: développement, simplification et factorisation des expressions algébriques.

Objectifs d'apprentissage

- connaître une expression littérale ;
- Factoriser, réduire une expression littérale ;
- Développer en utilisant la distributivité ;
- Supprimer les parenthèses ;
- Utiliser les identités remarquables ;
- Connaître la priorité des calculs.

Je vérifie mes prérequis

Ce QCM vérifie les connaissances des élèves à propos de l'écriture d'expressions littérales et leur signification, par exemple quand est ce que l'expression $3x-4 = 8+5x$ est vraie ; ainsi que la manipulation des expressions littérales, comme développement de l'expressions du type 7(a+2) ; l'écrtiture du périmètre d'un rectangle de dimensions x et 3.

Activités de découverte

Activité 1

Dans cette activité on approche la notion de calcul littéral où une quantité est exprimée en fonction d'une autre quantité.

1) Pour 2 maisons 2x5 allumettes ; Pour 3 maisons 3x5 allumettes ; Etc.

2) pour 388 maisons : 388x5 = 1940 allumettes

3) si on connaît le nombre de maisons on multiplie ce nombre par 5 pour trouver le nombre d'allumettes.

4) Le nombre d'allumettes est égal 5 fois nombre de maisons

Activité 2

Dans cette activité on manipule une expression littérale, en calculant les valeurs qu'elle prend selon le changement des « variables » t et s.

1) t représente le temps de communication téléphonique et s représente le nombre des SMS envoyés.

2) Le prix à payer est : 149 + (65-60)x3,6 + (50-30)x1,2 = 149+ 18 +24 = 191 dh ;

3) on calcule comme en 2) les prix à payer dans chaque cas.

Activité 3

Cette activité réinvestit et mobilise chez les élèves les formules k(a+b) = ka +kb et (a+b)(c+d)

Activité 4

Cette activité aborde des écritures de type 8 + (x-9) qui est aussi 8+ 1x (x-9) ou aussi -(y+3) = (-1) (y+3).

Ce genre d'écriture est utile lorsqu'on veut factoriser des expressions du type 8(x-9)y + (x-9) car les élèves ont parfois des difficultés à percevoir ce qui reste dans le deuxième terme lorsqu'on factorise par (x-9). Certains ont tendance à croire « qu'il ne reste rien » alors qu'il reste 1.

Activité 5

Dans cette activité il s'agit d'exprimer des aires avec des dimensions comprenant des variables x et y.

a) en calculant l'aire de chaque rectangle colorié, on trouve que l'aire colorié totale est 10x-8y ou aussi 10(x-y) +2y ou également 8(x-y)+2x

b) on remplace x et y par les valeurs proposées dans l'une des trois expressions équivalentes trouvées dans b).

Cours

Des activités traitées, l'élève doit retenir :

1. La signification d'une écriture littérale : elle comprend des lettres désignant des nombres
2. La signification de « développer » : transformer un produit en une somme ; et « factoriser » : transformer une somme en produit, et réduire : écrire une expression littérale avec le moins de termes possibles.
3. La distributivité simple et double de x par rapport à +
4. Les trois identités remarquables usuelles
5. La priorité des calculs : puissances, multiplication, division, addition et soustraction
6. La manipulation des parenthèses et de la soustraction : lorsqu'on enlève les parenthèses devant un signe – on change les signes à l'intérieur de ces parenthèses. Par exemple a-(b+c-d) = a-b-c+d

Exercices résolus

Exercice 1

Dans l'exercice 1, on montre aux élève que la manipulation d'expressions littérales peut aider à découvrir l'explication des énigmes ou la solution d'une équation.

Exercice 2

Cet exercice montre comment trouver la valeur d'une expression littérale quand on attribue à la variable une valeur particulière.

Exercice 3

Dans cet exercice on exercice l'habileté de factorisation d'expressions littérales.

Exercice 4

Dans cet exercice on exercice l'habileté de développement d'expressions littérales.

Exercices 5 et 6

Dans cet exercice on exercice l'habileté de développement et de réduction d'expressions littérales.

Exercices et problèmes

Exercice 11

$A= 5x(x+1) +2(x+1) = (x+1)\ (5x+2)$

$B=(x-2)^2 + 9(x-2)= (x-2)\ ((x-2)+9))= (x-2)(x+7)$

$C= =(x-2)^2 -x(x-2)= (x-2)\ ((x-2)-x))= (x-2)(-2)=-2(x-2)$

Exercice 12

1) $xy-2x= x(y-2)$

2) $E(x) = xy-2x + y-2 = x(y-2) + (y-2) = (y-2)(x+1)$

Exercice 18

1) $G= a(a-b) +b(a-b) = a^2 -ab +ba-b^2= a^2 -b^2$

2) $G = (a-b) (a+b)$

3) on déduit de ce qui précède que $a^2 -b^2= (a-b) (a+b)$

Exercice 24

1) $(2x+1)^2 -x^2 = (2x+1-x)(2x+1+x) = (1+x)(3x+1)$

2) $(2x+1)^2-(2-x)^2 = ((2x+1-(2-x))x)(2x+1+2-x) = (2x+1-2+x)(x+3)=(3x-1)(x+3) = (x+3)(3x-1)$

Exercice 34

1) $p_1 = (6+x)x= 6x+x2$

2) $p_2 = (3+x)2$

3) $(3+x)^2 = (6x+x^2) +9$

$p_2 = p1 + 9$

QCM pour s'évaluer.

Ce QCM permet aux élèves de vérifier leur degré d'acquisition des notions traitées dans la leçon (concepts, techniques, règles, formules…) : Développement du produit d'un nombre et une somme, du produit d'un nombre et une différence ; du produit de deux sommes ; développement du produit de deux différences ; factorisation d'une expression, identités remarquables.

Répondre correctement aux items du QCM est un indice de l'atteinte par les élèves des objectifs de la leçon. Des erreurs ou des difficultés dans les réponses à ces items doivent inciter les élèves à revoir leurs cours, approfondir leur compréhension. L'enseignant doit aussi tirer profit de ce QCM pour réguler son enseignement et prévoir des activités de remédiation et de renforcement des acquis de ses élèves.

10 Equations

La recherche d'efficacité face à des problèmes plus résistants (correspondant par exemple à des programmes de calcul non réversibles), l'insuffisance de la démarche numérique face à des problèmes du type ax + b = cx + d, ou encore la nécessité d'obtenir les valeurs exactes des solutions de certaines équations motivent l'introduction de la symbolisation et la modélisation d'une situation par une équation ou une inéquation.

Cette leçon consolide la notion d'équation abordée en première année du collège. Il s'agit de renforcer les connaissances et les habiletés des élèves dans ce domaine fondamental.

La notion d'équation repose sur deux notions essentielles ; l'inconnue, et l'équivalence logique des expressions algébriques. Les élèves doivent saisir le sens de l'expression « résoudre une équation » et les procédés de résolution ainsi que la vérification de la validité des solutions trouvées. Ils doivent aussi comprendre que tester si une égalité comportant un ou deux nombres indéterminés est vraie lorsqu'on leur attribue des valeurs numériques.

Une attention particulière est apportée à l'introduction d'une lettre pour désigner un nombre inconnu dans des situations où le problème ne peut pas être facilement résolu par un raisonnement arithmétique. Les programmes du collège prévoient une initiation progressive à la résolution d'équations, de manière à éviter la mise en œuvre d'algorithmes dépourvus de véritable sens.

Notons enfin que les équations sont un outil puissant pour mathématiser, modéliser et résoudre beaucoup de situations de la vie courantes ou issues d'autres disciplines.

Cette leçon est ainsi une occasion de travailler sur la modélisation par les mathématiques.

Objectifs d'apprentissage

- Reconnaître des techniques simples de la résolution d'une équation ;
- Résoudre une équation de la forme ax +b = cx + d ;
- Vérifier les solutions obtenues ;
- Mettre en équation un problème ;
- Résoudre un problème.

Je vérifie mes prérequis

Ce QCM vérifie les connaissances des élèves à propos de la manipulation des expressions littérales, et aussi leur capacité à « résoudre » des équations exprimées dans la « langue naturelle » ou de vérifier si un nombre est solution ou non d'une équation donnée.

Activités de découverte

Activité 1

Dans cette activité il s'agit d'exprimer une situation imagée par une équation à une inconnue $11x+5 = 3x +22$

Activité 2 et Activité 3

Ces deux activités portent sur la démarche algébrique de résolution d'équation, où progressivement on arrive à « isoler » l'inconnue x.

Activité 4

Dans cette activité on s'exerce sur la résolution des équations en utilisant les techniques développées dans les activités 2 et 3.

Activité 5

Dans cette activité on utilise les équations pour résoudre des situations concrètes.

1) le volume d'essence dans le réservoir est égal à $\frac{3}{4}$x180 = 135 litres.

2) ici on a l'équation $\frac{3}{4}x = 180$ où x est le volume du réservoir.

D'où $x = \frac{4x180}{3} = 4x60 = 240$ litres.

Activité 6

Cette activité porte sur la modélisation d'une situation concrète à l'aide d'une équation.

1) notons x le nombre d'élèves qui étaient au 1er groupe au début

2)

	Nombre d'élèves dans le 1er groupe	Nombre d'élèves dans le 2ème groupe
Au début	x	$24-x$
Après 15 minutes	$x+4$	$(24-x)-4$

3) $x+4 = 3(24-x-4)$

4) $x+4 = 3(24-x-4)$ donc $x+4 = 3(20-x)$

Alors $x+4 = 60-3x$ d'où $x+3x= 60-4$ donc $4x= 56$ enfin $x= 14$.

5) au début le 1er groupe comprenait 14 élèves et le 2ème groupe comprenait 10 élèves

Cours

Des activités traitées, l'élève doit retenir :

1. La notion d'équation, ce que signifie résoudre une équation, et les procédures algébriques de résolution (transformer l'équation en équations équivalentes pour isoler x, et ce en additionnant, soustrayant, divisant ou multipliant par un même nombre)
2. Comment mettre en équation une situation, répondre à la question et s'assurer de la véracité de la solution proposée.

Exercices résolus

Exercices 1 et 2

On travaille ici la procédure d'isolement de l'inconnue pour résoudre l'équation.

Exercice 3

On mathématise une situation concrète en choisissant l'inconnue et en traduisant les données sous forme d'équation

On note x le prix d'un des livres.

Les économies de Malak s'écrivent de deux façons :

$7x$-8 et $6x+36$

D'où l'équation $7x-8 = 6x+36$ que l'on résout par les techniques étudiées précédemment.

Exercices et problèmes

Exercice 7

$$\frac{2x-5}{4} - \frac{3x-1}{3} = x - \frac{1-2x}{12}$$

On réduit au même dénominateur :

$3(2x-5)-4(3x-1) = 12x-(1-2x)$

$6x-15-12x+4=12x-1+2x$

$-6x-11=14x-1$

$14x+6x=-11+1$

$20x=-10$

$x= -\frac{10}{20}$

$x= -\frac{1}{2}$

Exercice 8

Notons x le nombre de filles.

Le nombre des garçons est alors $28-x$

Le jour où Samir était absent il y avait $28-x-1$ garçons

Et selon les données nous avons $x= 2(28-x-1)$ c'est-à-dire $x= 2(27-x)$

Donc $x=54-2x$

$3x= 54$ d'où $x=\frac{54}{3}$

Finalement $x = 18$

Il y a donc 18 filles et 10 garçons dans cette classe.

Exercice 11

Notons n le nombre d'années cherché.

Dans n années l'âge du père sera 48+n et l'âge de Salma 18+n

Et on aura selon les données :

48+n = 2(18+n)

48+n= 36+2n

48-36=2n-n

D'où n= 12

Dans 12 ans le père aura 60 ans et Salma 30 ans (60 = 2x30).

Exercice 16

Notons x = DM

L'aire du triangle ADM est égale à $\frac{12x}{2} = 6x$

L'aire du triangle BCM est égale à $\frac{12(30-x)}{2}$ = 6(30-x)

Nous voulons que $6x = \frac{1}{3} \times 6(30-x)$

$6x = \frac{1}{3} \times 6(30-x)$

$x = \frac{1}{3}(30-x)$

$3x=30-x$

$4x=30$

$x = \frac{30}{4}$

x= 7,5.

Donc M doit être à 7,5 cm de D.

Exercice 21

Lepérimère du carré est $4x$

Le périmètre du triangle équilatéral est $3(10-x)$

Nous voulons que les deux périmètres soient égaux donc $4x=3(10-x)$

$4x= 30-3x$

$7x=30$

$x = \frac{30}{7}$

QCM pour s'évaluer.

Ce QCM permet aux élèves de vérifier leur degré d'acquisition des notions traitées dans la leçon (concepts, techniques, règles, formules…) : inconnue dans une situation ;techniques simples de résolution d'une équation ; résolution d'une équation ax +b = cx + d ….

Répondre correctement aux items du QCM est un indice de l'atteinte par les élèves des objectifs de la leçon. Des erreurs ou des difficultés dans les réponses à ces items doivent inciter les élèves à revoir leurs cours, approfondir leur compréhension. L'enseignant doit aussi tirer profit de ce QCM pour réguler son enseignement et prévoir des activités de remédiation et de renforcement des acquis de ses élèves.

11 Ordre et opérations

Repères didactiques

L'ordre et les opérations constituent des notions omniprésentes dans les calculs et la manipulation des nombres, que ce soit dans la résolution des problèmes ou dans la résolution des équations.

La maîtrise de ces deux notions doit être une priorité pour l'enseignant. En effet, leur disponibilité et leur utilisation est un garant de la réussite de l'utilisation des nombres.

Les règles régissant l'ordre en rapport avec les opérations doivent être bien assimilées.

Des erreurs sont fréquentes dans l'utilisation de l'ordre et des opérations ; par exemples multiplier une inégalité par un nombre négatif sans changement du sens de l'inégalité, ou « soustraire deux inégalités ».

Objectifs d'apprentissage

- Comparer deux nombres relatifs, en particulier connaître et utiliser :
- l'équivalence entre a ≥ b et a - b ≥ 0 ;
- l'équivalence entre a ≤ b et a - b ≤ 0.
- Utiliser le fait que des nombres relatifs de l'une des deux formes suivantes sont rangés dans le même ordre que a et b : a + c et b + c ; a - c et b - c ;
- Utiliser le fait que des nombres relatifs de la forme ac et bc sont dans le même ordre que a et b si c est strictement positif, dans l'ordre inverse si c est strictement négatif ;
- Écrire un encadrement d'un nombre relatif ;
- Utiliser la notation scientifique pour obtenir un encadrement.

Je vérifie mes prérequis

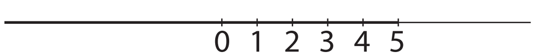
Dans ce QCM, nous vérifions si les élèves ont les prérequis nécessaires sur quelques savoir-faire relatifs et les fractions ainsi que leur comparaison.

Activités de découverte

Activité 1

Il s'agit dans cette activité de traduire et d'écrire dans différents langages et représentations la même idée mathématique : phrase en langue Française, écriture sous forme d'inégalité en utilisant les symboles adéquats : x,>, $\geqslant$, <, $\leqslant$ et représentation sur une droite graduée.

La même idée est traduite dans différents cadres : x est inférieur strictement à 5, $x<5$



Activité 2

Dans cette activité, l'élève apprend à ajouter ou à retrancher un nombre aux deux membres d'une inégalité et l'inégalite garde le même sens:

si $a < b$ alors $a + c < b + c$ et $a - c < b - c$ pour tout nombre c.

Activités 3 et 4

dans cette activité, l'élève apprend à multiplier les deux membres d'une inégalité de nombres relatifs par un nombre positif sans que le sens de l'inégalité change :

si $a < b$ et si $c > 0$ alors $a \times c < b \times c$ et de même, il apprend à multiplier les deux membres d'une inégalité par un nombre négatif et changer par conséquent le sens de cette inégalité:

si $a < b$ et si $c < 0$ alors $a \times c > b \times c$

Cours

Des activités traitées l'élève :

- Comprend le sens d'une inégalité.
- Traduit une inégalité d'une écriture en une autre : $a < b$ signifie $a - b < 0$ ou $b - a > 0$.
- Ajouter un nombre relatif ou le retracher à une inégalité sans changer le sens de l'inégalité.
- Multiplie les deux membres d'une inégalité par un nombre relatif positif et garder alors le sens de l'inégalité : si $a < b$ et si $c > 0$ alors $a \times c < b \times c$.
- Multiplie les deux membres d'une inégalité par un nombre relatif négatif en changeant alors le sens de l'inégalité : si $a < b$ et si $c < 0$ alors $a \times c > b \times c$.
- Apprend l'encadrement d'un nombre.
- Déduit un encadrement d'un autre en ajoutant et/ou en retranchant d'autres nombres à cet ebcadrement : si $a < x < b$ alors $a + c < x + c < b + c$ et $a - c < x - c < b - c$.
- Déduit un encadrement d'un autre en multipliant par un nombre positif en gardant le sens des différentes inégalités ou en multipliant par un nombre négatif en changeant le sens des inégalités :

  - si $a < x < b$ et si $c > 0$ alors $a \times c < x \times c < b \times c$

  - si $a < x < b$ et si $c < 0$ alors $a \times c > x \times c > b \times c$.

Exercices résolus

exercice 1:

L'élève compare les nombres $\frac{4}{9}$ et $\frac{7}{15}$ et compare $- 4,8 \times 10^6$ et $- 510 \times 10^5$.

exercice 2:

L'élève démontre que $x < - 1$ à partir de $x + 5 < 4$ et il déduit que $x < -\frac{3}{2}$ à partir de $-\frac{2}{3}x < 1$ en appliquant les règles de calcul apprises.

exercice 3:

L'élève démontre de deux manières différentes que $a < b$ et $c < d$, implique : $a + c < b + d$.

exercice 4:

L'élève compare le périmètre d'un triangle et celui d'un rectangle dans le cas où $x > 6$.

Exercices et problèmes

Exercices 1 à 9

Les élèves comparent des nombres relatifs.

Exercices 10 à 19

Les élèves résolvent des situations faisant intervenir l'ordre et l'addition.

Exercices 20 à 33

Les élèves traitent des situations faisant appel à l'ordre et la multiplication.

Exercices 34 à 40

Les élèves représentent des encadrements sur une droite graduée et ils trouvent des encadrements à partir d'autres encadrements.

Les exercices à partir du quarantième et jusqu'au dérnier exercice portent sur des situations d'approfondissement faisant intervenir d'autres concepts mathématiques en plus de l'ordre et de l'encadrement.

QCM pour s'évaluer.

Ce QCM permet aux élèves de vérifier leur degré d'acquisition des notions traitées dans la leçon (concepts, techniques, règles, formules…) : ordre et opération.

Répondre correctement aux items du QCM est un indice de l'atteinte par les élèves des objectifs de la leçon. Des erreurs ou des difficultés dans les réponses à ces items doivent inciter les élèves à revoir leurs cours, approfondir leur compréhension. L'enseignant doit aussi tirer profit de ce QCM pour réguler son enseignement et prévoir des activités de remédiation et de renforcement des acquis de ses élèves.

12 Triangle rectangle et cercle

Repères didactiques

Le triangle rectangle joue un rôle important dans la géométrie et intervient dans plusieurs configurations et problème. Plusieurs propriétés sont reliées au triangle rectangle comme le théorème de Pythagore, les rapports trigonométriques. Le cercle circonscrit au triangle rectangle a aussi des propriétés géométriques intéressantes comme par exemple d'avoir l'hypoténuse du triangle comme diamètre et ce qui en découle comme autres propriétés.

Objectifs d'apprentissage

- Caractériser le triangle rectangle par l'égalité de Pythagore ;
- Calculer le carré de la longueur d'un côté d'un triangle rectangle à partir de celles des deux autres ;
- Caractériser le triangle rectangle par son inscription dans un cercle dont le diamètre est un côté du triangle ;
- Caractériser les points d'un cercle de diamètre donné par la propriété de l'angle droit ;
- Utiliser dans un triangle rectangle la relation entre le cosinus d'un angle aigu et les longueurs des côtés adjacents ;
- Utiliser la calculatrice pour déterminer un cosinus ou un angle aigu.

Je vérifie mes prérequis

Les prérequis vérifiés dans ce QCM sont :

- Dans un triangle rectangle l'angle droit est toujours opposé (en face) au côté le plus long dans le triangle : l'hypoténuse;
- La somme des angles d'un triangle est égale à 180°;
- L'aire d'un triangle est égale à la moitié du produit de la base par la hauteur;
- La caractérisation du parallélogramme comme quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu;
- La caractérisation d'un rectangle en tant que quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu et ayant le même milieu;
- M est point de la mediatrice de [AB] signifie MA = MB;
- Deux points distincts S et T définissent un seul cercle de diamètre [ST].

Activités de découverte

Activité 1

L'objet est de découvrir le théorème de pythagore sur des exemples de triangles rectangles (trois cas).

Activité 2

cette activité représente une démonstration du théorème de Pythagore par une méthode utilisant un calcul sur les aires.

Activité 3

Il s'agit de vérifier sur des exemples la réciproque du théorème de Pythagore.

Activité 4

Les élèves tracent un cercle circonscrit à un triangle et remarquent que le centre de ce cercle se situe à l'intérieur ou à l'extérieur du triangle selon que le triangle a tous ses angles aigus ou ayant un des angles obtus.

Activité 5

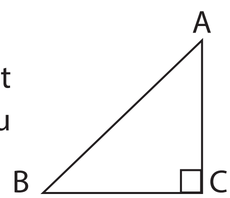
Il s'agit de conjecturer et de démontrer par la suite le résultat suivant : Dans un triangle rectangle, le centre du cercle circonscrit est le milieu de l'hypothénuse.

Activité 6

Les élèves démontrent dans cette activité le résultat suivant : Dans un triangle rectangle la longueur de la médiane relative à l'hypothénuse est égale à la moitié de la longueur de l'hypothénuse.

Activité 7

Dans cette activité les élèves démontrent le résultat suivant : si A, B et C sont trois points alignés et si le point A par exemple appartient au cercle circonscrit au triangle ABC alors l'angle $\widehat{BAC}$ est droit.



Activité 8

Il s'agit de conjecturer le résultat suivant : Dans un triangle rectangle ABC dont l'angle $\widehat{B}$ est aigu on a : le rapport $\frac{BC}{BA}$ est constant et s'appelle cosinus de l'angle $\widehat{B}$.

Activité 9

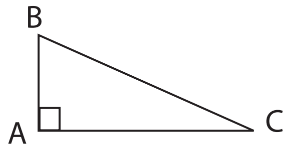
Dans cette activité les élèves apprennent à utiliser la calculatrice pour calculer le cosinus d'un angle donné et de calculer un angle dont le cosinus est connu.

Cours

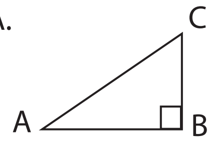
Des activités traitées les élèves déduisent les résultats suivants :

- Dans un triangle rectangle, l'hypoténuse est un diamètre de son cercle circonscrit;
- Dans un triangle rectangle, la médiane relative à l'hypoténuse a pour longeur la moitié de la longueur de l'hypoténuse;
- Un triangle, dont un côté est un diamètre de son cercle circonscrit, est un triangle rectangle;
- Un triangle dont la médiane à un côte a pour longueur la moitié de la longueur de ce côté, est un triangle rectangle;

- Le théorème de pythagore : Dans un triangle ABC rectangle en A :
  on a : $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

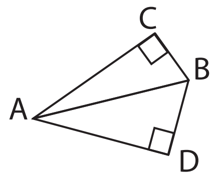


- La réciproque du théorème de pythagore :
  si dans un triangle ABC : $BC^2 = AB^2 + AC^2$ alors le triangle est rectangle en A.
- La définition du cosinus d'un angle : $\cos\widehat{A} = \dfrac{AB}{AC}$.



Exercices résolus

Exercice 1



Les élèves montrent que les quatre points A, B, C et D appartiennent au même cercle :

Exercice 2

Il s'agit de montrer que le triangle ACE est rectangle en E en suivant la méthode suivante :

- Faire une figure codée;
- chercher dans les données celles qui correspondent aux propriétés et aux théorèmes du cours;
- Conclure.

Exercice 3

Les élèves appliquent la propriété de la longueur de la médiane dans un triangle rectangle pour conclure la longueur de l'hypoténuse à partir de celle de la médiane.

Exercice 4

Les élèves reconnaissent dans cette situation une configuration du cours et utilisent la propriété correspondante.

Exercice 5

Les élèves appliquent les résultats relatifs à la propriété du triangle rectangle circonscrit à un cercle et montrent que les quatre points A, B, V et G appartiennent au cercle de diamètre [AB].

Exercice 6

Les élèves appliquent le théorème de Pythagore pour calculer la longueur d'un côté dans un triangle rectangle et utilisent la calculatrice pour trouver une valeur approchée du résultat en utilisant la touche $\sqrt{\ }$.

Exercice 7

Les élèves utilisent la propriété réciproque de Pythagore pour montrer qu'un triangle est rectangle ou non.

Exercice 8

Les élèves calculent la longueur de l'hypoténuse dans un triangle rectangle connaissant le cosinus d'un angle et la longueur du côté adjacent.

Dans les exercices **9**, **10**, **11** et **12** les élèves utilisent la calculatrice pour calculer : le cosinus d'un angle ou un angle dont le cosinus est connu, la racine carrée d'un nombre donné.

Exercices et problèmes

Exercices 1 à 30

Portent sur le triangle rectangle et le cercle.

Exercices 31 à 46

Portent sur le théorème de Pythagore.

Exercices 47 à 51

Portent sur la réciproque de Pythagore.

Exercices 53 à 58

Portent sur le vocabulaire et sur les formules.

Exercices 59 à 72

Portent sur le cosinus d'un angle dans un triangle rectangle.

QCM pour s'évaluer.

Ce QCM permet aux élèves de vérifier leur degré d'acquisition des notions traitées dans la leçon.

Répondre correctement aux items du QCM est un indice de l'atteinte par les élèves des objectifs de la leçon. Des erreurs ou des difficultés dans les réponses à ces items doivent inciter les élèves à revoir leurs cours, approfondir leur compréhension. L'enseignant doit aussi tirer profit de ce QCM pour réguler son enseignement et prévoir des activités de remédiation et de renforcement des acquis de ses élèves.

13 Vecteurs et translation

Repères didactiques

La translation est une transformation géométrique importante en mathématiques. Les usages sont multiples en mathématiques et dans les autres sciences. Elle est conceptuellement liée à la notion de vecteur. Cette dernière notion est aussi riche et reliée à d'autres notions comme le parallélogramme.

Une des difficultés par rapport à la translation est de la confondre avec d'autres transformations géométriques comme la symétrie ou la rotation. Quant aux difficultés en rapport avec la notion de vecteurs c'est de les concevoir comme des bipoints équipollents.

L'enseignement des vecteurs vise à faire passer les élèves de la géométrie euclidienne du plan et de l'espace à une géométrie vectorielle. Les vecteurs sont définis par leurs caractéristiques géométriques de longueur, de direction et de sens. On traite ensuite la notion d'égalité de deux vecteurs, la somme de deux vecteurs et puis on relie la notion de vecteurs au parallélogramme.

Objectifs d'apprentissage

- Construire l'image d'une figure géométrique par une translation ;
- Déterminer le vecteur d'une translation ;
- Reconnaître un vecteur : direction, sens, longueur et le construire ;
- Construire la somme de deux vecteurs : parallélogramme, chasles.

Je vérifie mes prérequis

On vérifie les prérequis suivants des élèves :

- Nomination à l'aide des lettres A, B, C et D d'un parallélogramme;
- Les propriétés d'un parallélogramme.

Activités de découverte

Activité 1

L'activité porte sur les trois éléments qui caractérisent une translation (ou un glissement) :

- La direction;
- Le sens;
- La longueur.

Activité 2

Il s'agit de déterminer plusieurs représentations du vecteur d'une translation qui transforme une figure en une autre figure.

Activité 3

Il s'agit ici de définir l'égalité de deux vecteurs à partir de la translation qu'ils définissent.

Activité 4

Les élèves déterminent les vecteurs égaux dans une configuration en examinant par ordre : la direction, le sens et en fin la longueur.

Activité 5

Cette activité porte sur la relation de Chasles approchée par la composition de translations.

Cours

Des activités traitées les élèves :

- Apprennent les notions de direction, de sens et de la longueur qui sont les notions de base pour la définition d'une vecteur;
- Définissent une translation de vecteur donné;
- Mettent le lien entre translation et parallélogramme;
- Déterminent l'image d'une droite et d'un cercle par une translation et ils apprennent qu'une translation conserve les distances et la mesures des angles;
- Définissent un vecteur par la donnée d'une direction, d'un sens et d'une longueur;
- Définissent aussi la somme de deux vecteurs.

Exercices résolus

Exercice 1

Les élèves apprennent à construire à l'aide d'un point une translation donnée à l'aide du compas.

Exercice 2

Les élèves contruisent l'image d'une droite par une translation donnée.

Exercice 3

Les élèves apprennent à construire l'image d'une figure par une translation donnée.

Exercice 4

Il s'agit de compléter le tracé d'une figure en mobilisant les propriétés de la translation.

Exercice 5

Les élèves construisent la somme de deux vecteurs sur une trame carrée.

Exercice 6

Les élèves simplifient l'écriture de la somme de deux vecteurs en appliquant la relation de Chasles.

Exercice 7

Il s'agit de caractériser le milieu I d'un segment [AB] par l'écriture vectorielle : I milieu du segment [AB] signifie : $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{BI}$

Exercice 8

Les élèves comprennent sur un exemple que les propriétés suivantes sont équivalentes :

- ABCD parallélogramme;
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$;
- La translation qui transforme A en B transforme aussi D en C;
- Les deux segments [AC] et [BD] ont le même milieu.

Exercices et problèmes

Exercices 1 à 19

Portent sur la notion de translation.

Exercices 20 à 46

Portent sur des situations faisant intervenir la notion de vecteur.

QCM pour s'évaluer.

Ce QCM permet aux élèves de vérifier leur degré d'acquisition des notions traitées dans la leçon.

Répondre correctement aux items du QCM est un indice de l'atteinte par les élèves des objectifs de la leçon. Des erreurs ou des difficultés dans les réponses à ces items doivent inciter les élèves à revoir leurs cours, approfondir leur compréhension. L'enseignant doit aussi tirer profit de ce QCM pour réguler son enseignement et prévoir des activités de remédiation et de renforcement des acquis de ses élèves.

14 Prisme droit, pyramide et cône de révolution

Repères didactiques

La notion de prisme droit a été étudiée en première année du collège avec la notion de cylindre. Cette année deux solides sont abordés : la pyramide et le cône de révolution.

L'objectif est d'entretenir et d'approfondir les acquis : représenter, décrire et construire des solides de l'espace, en particulier à l'aide de patrons. Passer de l'objet à ses représentations (et inversement) constitue encore l'essentiel du travail. L'observation et la manipulation d'objets usuels sont des points d'appui indispensables. Le dessin de ces solides en perspective cavalière, le calcul de l'aire latérale et de l'aire totale et du volume d'une pyramide et d'un cône de révolution sont des objectifs fondamentaux de cette leçon.

Objectifs de la leçon

- Reconnaître et fabriquer un prisme droit et consolider mes acquis ;
- Reconnaître et fabriquer une pyramide et un cône de révolution ;
- Dessiner ces trois solides en perspective cavalière ;
- Reconnaître et dessiner des patrons de ces trois solides ;
- Calculer l'aire latérale et l'aire totale d'une pyramide et d'un cône de révolution ;
- Calculer le volume d'une pyramide et d'un cône de révolution ;
- Connaître les positions relatives des droites et des plans dans l'espace.

Je vérifie mes prérequis

Dans ce QCM les élèves vérifient les prérequis suivants :

- Reconnaître les faces, les arêtes et sommets ainsi que leur nombre dans un prisme droit;
- L'aire latérale du cylindre et du prisme droit.

Activités de découverte

Activité 1

Dans cette activité, les élèves reconnaissent des solides et les nomment et plus particulièrement le prisme droit, la pyramide et le cône de révolution.

Activité 2

Les élèves perçoivent certains solides : le cylindre et le cône comme des solides obtenus par rotation d'une figure plane autour d'un axe.

Activité 3

Les élèves associent des solides à leurs patrons

Activité 4

Cette activité porte sur le patron d'un cône.

Activité 5

Par une manipulation, les élèves contruisent trois pyramides identiques à partir de trois patrons identiques et ils composent un cube et en déduisent ensuite le volume de la pyramide.

Activité 6

Il s'agit dans cette activité de conjecturer la formule qui permet de calculer le volume d'un cône.

Activité 7

dans cette activité, les élèves approchent la position relative de deux droites, d'une droite et d'un plan et de la position relative de deux plans dans une configuration particulière : un cube.

Cours

Des activités traitées les élèves :

- Définissent un prisme droit connaissant les propriétés correspondantes;
- Définissent une pyramide, ses faces latérales, sa base et sa hauteur;
- Définissent une pyramide régulère;
- Définissent un cône de révolution;
- Les patrons d'un prisme droit, d'une pyramide et d'un cône de révolution;
- Déduisent l'aire latérale et le volume d'un prisme droit, d'une pyramide et d'un cône de révolution;
- Se construisent une idée intuitive d'une droite, d'un plan et de leurs positions relatives à la base de la configuration d'un cube.

Exercices résolus

Exercice 1:

On trace sur un quadrillage une pyramide comme partie d'un cube.

Exercice 2:

Les élèves fabriquent un patron d'une pyramide et le dessinent.

Exercice 3:

Les élèves réalisent un patron d'un cône donné.

Exercice 4:

Les élèves calculent l'aire latérale et le volume d'une pyramide.

Exercice 5:

Les élèves calculent le volume d'un cône dont la hauteur h est donnée et dont le rayon de base est connu.

Exercice 6:

Il s'agit de calculer les dimensions de la figure obtenue par l'intersection d'un plan et d'un cube.

Exercices et problèmes

Exercices 1 à 5

Ont pour objet l'observation et la connaissance des solides : faces, arêtes, et sommets, leurs nombres et la forme des faces.

Exercices 6 à 8

Portent sur la représentation et la construction de solides (un prisme droit, une pyramide et un cône) en perspective cavalière sur une trame carrée.

Exercices 9 à 15

Ont pour objet les patrons d'une pyramide, d'un prisme droit et du cône.

Exercices 16 à 26

Ont pour objet le calcul des dimensions du prisme droit, du cône et de la pyramide.

Exercices 27 à 38

Portent sur le calcul de l'aire latérale du prisme droit, du cône et de la pyramide.

Exercices 16 à 26

Portent sur le calcul de volume du prisme droit, de la pyramide et du cône révolution.

QCM pour s'évaluer.

Ce QCM permet aux élèves de vérifier leur degré d'acquisition des notions traitées dans la leçon (concepts, techniques, règles, formules…).

Répondre correctement aux items du QCM est un indice de l'atteinte par les élèves des objectifs de la leçon. Des erreurs ou des difficultés dans les réponses à ces items doivent inciter les élèves à revoir leurs cours, approfondir leur compréhension. L'enseignant doit aussi tirer profit de ce QCM pour réguler son enseignement et prévoir des activités de remédiation et de renforcement des acquis de ses élèves.

15 Proportionnalité

Repères didactiques

La proportionnalité est une notion autour de laquelle peuvent être pensés et organisés de nombreux apprentissages mathématiques. Sa maîtrise est essentielle tant pour un usage dans la vie courante que dans un cadre professionnel. Son apprentissage a commencé dés les premières années de l'école primaire et continue au cours des années suivantes

L'objectif n'est pas, à ce stade, de mettre en avant telle ou telle procédure particulière, mais de permettre à l'élève de disposer d'un répertoire de procédures, s'appuyant toujours sur le sens, parmi lesquelles il pourra choisir en fonction des nombres en jeu dans chaque situation.

La résolution de problèmes de proportionnalité permet d'acquérir des connaissances et de développer des compétences en lien avec d'autres disciplines.

les premières activités sur la proportionnalité sont proposées dès la première année du collège; les élèves ont recours à des procédures utilisant les propriétés de la linéarité (procédure utilisant la propriété de linéarité pour l'addition, procédure utilisant la propriété de linéarité pour la multiplication par un nombre). Ensuite, les élèves rencontrent progressivement des situations qui nécessitent de combiner des procédures utilisant les propriétés de la linéarité (procédure mixte utilisant les propriétés de linéarité pour l'addition et pour la multiplication par un nombre, passage par l'unité). Par la suite, s'ajoutent des problèmes impliquant des échelles ou des vitesses constantes. Si le coefficient de proportionnalité est déjà rencontré à l'école primaire, notamment lors de travaux sur les échelles, son institutionnalisation dans un cadre général sera faite les années prochaines.

toutes les procédures introduites à l'école primaire pour résoudre des problèmes de proportionnalité continuent à être utilisées en fonction des nombres en jeu dans les problèmes proposés et des connaissances de faits numériques des élèves. Des tableaux de proportionnalité sont régulièrement utilisés pour résoudre des problèmes ; ils facilitent l'utilisation du coefficient de proportionnalité, particulièrement efficace quand un nombre important de données doivent être calculées. Le produit en croix est introduit après l'étude de l'égalité des fractions ; il permet de calculer rapidement une quatrième proportionnelle, quand les nombres en jeu ne permettent pas d'utiliser facilement des procédures basées sur les propriétés de linéarité. En 3ème année du collège, les élèves font le lien entre les fonctions linéaires et la proportionnalité.

La proportionnalité est appréhendée dans de nombreuses autres disciplines (géographie, EPS, sciences et technologie, etc.) ou dans des situations de la vie courante, ce qui permet de renforcer le travail mené en mathématiques. L'enseignant propose aux élèves des situations variées relevant de la proportionnalité et leur apprend à mobiliser différentes procédures pour résoudre des problèmes dans des contextes variés. L'enseignant invite les élèves à comparer ces procédures afin de constater que certaines sont plus efficaces que d'autres selon les nombres en jeu.

Pour que la proportionnalité prenne tout son sens, l'élève doit aussi être confronté à des situations ne relevant pas de la proportionnalité (« Si je mesure 1 mètre à 10 ans, je peux mesurer 2 mètres à 20 ans mais sûrement pas 4 mètres à 40 ans et je sais aussi que je ne mesurais pas 10 centimètres à 1 an. ») Le travail sur la proportionnalité est particulièrement propice au développement des six compétences travaillées en mathématiques : chercher, modéliser, représenter, calculer, raisonner et communiquer.

Chercher : tester, essayer plusieurs pistes de résolution dans la résolution de problèmes relevant des structures multiplicatives.

Modéliser : apprendre à modéliser des situations concrètes et reconnaître si elles relèvent de la proportionnalité ou non.

Représenter : se questionner sur le caractère proportionnel d'une situation représentée graphiquement en géographie, en sciences et technologie par exemple (une situation de proportionnalité entre deux grandeurs a pour représentation graphique un ensemble de points alignés avec l'origine).

Raisonner : chacune des étapes de résolution d'un problème relevant de la proportionnalité (compréhension de l'énoncé, identification d'une situation de proportionnalité, recherche, production et rédaction d'une solution) fait appel au raisonnement.

Calculer : les nombres en jeu et l'état des connaissances des élèves vont permettre de varier les modalités de calcul mises en oeuvre (calcul mental, en ligne, posé, instrumenté).

Communiquer : l'explicitation de ce qui est fait nécessite un réel travail de communication tant à l'oral qu'à l'écrit. Différencier le vocabulaire des structures additives « de plus » et « de moins » et celui des structures multiplicatives « fois plus » et « fois moins ».

Dans la résolution de problèmes relevant de la proportionnalité, différentes procédures sont à faire travailler par les élèves. Dans chacun des thèmes du programme, l'enseignant veille à oraliser les procédures possibles en termes similaires, ce qui permet aux élèves de les réinvestir dans différents registres – numérique – grandeurs – géométrique, tout en comprenant qu'elles relèvent de la même notion.

Des procédures relevant de la proportionnalité sont présentées ci dessous. L'analyse a priori de chaque exercice est complétée par des productions d'élèves.

PROCEDURES UTILISANT LA PROPRIETÉ DE LINÉARITE POUR L'ADDITION Domaine «Nombres et calculs»

8 fois 10 est égal à 80 et 8 fois 3 est égal à 24.

Comme 13 est égal à 10 plus 3, on en déduit que 8 fois 13 est égal à 80 plus 24.

Domaine «Grandeurs et mesures »

5 kg de pommes de terre coûtent 17,5 dh et 3 kg coûtent 10,5 dh.

Comme 5 kg moins 3 kg font 2 kg, on en déduit que 2 kg de ces pommes de terre coûtent 17,5 dh moins 10,5 dh soit 10,5 dh.

Domaine « Espace et géométrie »

La figure ABCD est telle que ACD est un triangle isocèle en A. On donne les dimensions suivantes DA = 18,2 cm, DC = 5,6 cm, AB = 11,9 cm et BC = 6,3 cm.

Sans utiliser de multiplication, indiquer les dimensions de l'agrandissement A'B'C'D' de cette figure telle que A'B' = 15,3 cm et B'C' = 8,1 cm.

Comme DC = 5,6 cm = 11,9 cm – 6,3 cm, on en déduit D'C' = 15,3 cm – 8,1 cm = 7,2 cm.

Comme DA = 18,2 cm = 11,9 cm + 6,3 cm, on en déduit D'A' = 15,3 cm + 8,1 cm = 23,4 cm.

PROCÉDURES UTILISANT LA PROPRIETÉ DE LINÉARITE POUR LA MULTIPLICATION PAR UN NOMBRE Domaine « Nombres et calculs »

7 fois 13 est égal à 91.

Comme 35 est le quintuple de 7, on a 35 fois 13 est le quintuple de 91 c'est-à-dire 455.

Domaine « Grandeurs et mesures »

Une pile de 500 feuilles de papier identiques a une épaisseur de 3,5 cm. Quelle est l'épaisseur d'une pile de 2 000 de ces mêmes feuilles ?

J'ai acheté 13 stylos qui étaient tous au même prix à la librairie et cela m'a coûté 19,5 dh. Si ma soeur veut en acheter 5, combien va-t-elle payer ?

Domaine « Espace et géométrie »

Dans un agrandissement ou une réduction, les longueurs sur la figure agrandie ou réduite sont proportionnelles aux longueurs associées sur la figure initiale. Les situations d'agrandissement ou de réduction sont particulièrement riches et propices à la mise en place d'activités à prise d'initiatives.

Certaines procédures utilisent à la fois les propriétés de linéarité pour l'addition et pour la multiplication par un nombre, on les qualifie alors parfois de **« procédures mixtes ».**

Dix objets identiques coûtent 220 dh. Combien coûtent quinze de ces objets ?

Pour résoudre ce problème on peut diviser par 2 le prix de dix objets pour trouver le prix de cinq objets (propriété de linéarité pour la multiplication par un nombre) puis ajouter le prix de dix objets et le prix de cinq objets (propriété de linéarité pour l'addition).

PASSAGE PAR L'UNITÉ

À la garderie, il faut prévoir 80 centilitres de lait pour 5 enfants.

Combien faut-il prévoir de centilitres pour 3 enfants ?

Pour 5 enfants, il faut 80 centilitres de lait.

1 enfant, c’est 5 fois moins que 5 enfants. 5 fois moins que 80 centilitres c’est 16 centilitres.

Pour 1 enfant, il faut 16 centilitres de lait.

3 enfants, c’est 3 fois plus que 1 enfant. 3 fois plus que 16 centilitres c’est 48 centilitres.

Pour 3 enfants, il faut 48 centilitres de lait.

En fin de l’école primaire, une nouvelle procédure est abordée, elle utilise le coefficient de proportionnalité.

Si 30 kg de café coûtent 1800 dh. Combien coûtent 13 kg de café ?

1800 c’est 30 multiplié par 60, il faut multiplier le nombre de kilogrammes de café par 60 pour en trouver le prix en dirham.

$13 \times 60 = 780$

Le prix de 13 kg de café est 780 dh.

On note ici l’utilisation d’une grandeur quotient (le coefficient de proportionnalité) : 60dh/kg. (proportionnalité, éduscol)

Objectifs de la leçon

- Reconnaître un tableau de proportionnalité ;
- Caractériser la proportionnalité par l’alignement de points avec l’origine du repère ;
- Lire une représentation graphique dans un repère ;
- Connaître des situations de proportionnalité ;
- Caractériser graphiquement la proportionnalité.

Je vérifie mes prérequis

Dans ce QCM on procède à une évaluation diagnostique des apprentissage concernant :

- Les tableaux de proportionnalités;
- La quatrième proportionnelle;
- Le calcul de pourcentage;
- Le calcul de distance en utilisant l’echelle;
- Les coordonnées des points et à l’alignement

Activités de découverte

Activité 1

Les élèves complètent un tableau de proportionnalité et déduisent le calcul d’autres résultats à partir de ce tableau.

Activité 2

les élèves vérifient qu’un tableau est de proportionnalité et le représentent graphiquement.

Activité 3

Il s'agit de vérifier sur un graphique la proportionnalité de deux grandeurs : Le volume et le temps et de calculer une grandeur connaissant l'autre.

Activité 4

Les élèves complètent un tableau en calculant l'aire d'un carré de côté x et son périmètre P. Ils constatent ensuite que le périmètre P est proportionnel à x tandis que l'aire A est non proportionnelle à x. Ils représentent ensuite les graphes de P et de A dans un repère et constatent que les points du graphe du périmètre sont alignés avec l'origine du repère tandis que les points du graphe de l'aire ne sont pas alignés.

Activité 5

Il s'agit de vérifier si les tableaux sont de proportionnalité et de les représenter graphiquement sur les repères proposés et de faire ensuite les conjectures nécessaires : Dans chacun des cas les points sont alignés avec l'origine du repère.

Activité 6

Les élèves, à partir d'une représentation graphique, complétent un tableau en écrivant les abscisses et les ordonnées des points proposés et de constater que le tableau est un tableau de proportionnalité.

Activité 7

Il s'agit d'associer chaque tableau à une surface et de déterminer les tableaux de proportionnalité et ensuite d'associer chaque graphique à chaque tableau et de reconnaître enfin les graphiques qui correspondent à des situations de proportionnalité.

Cours

Des situations traitées les élèves déduisent avec l'aide de l'enseignant :

- La méthode pour savoir si un tableau est de proportionnalité ou non;
- La définition des produits en croix;
- La définition de la quatrième proportionnelle;
- La représentation graphique d'une situation de proportionnalité;
- On réprond dans ce cours aussi des exemples de situations de proportionnalité connues par les élèves :
  - Pourcentage;
  - Echelle;
  - Vitesse moyenne.

Exercices résolus

Exercice 1:

Les élèves calculent une quatrième proportionnalle.

Exercice 2:

Les élèves représentent graphiquement une situation de proportionnalité.

Exercice 3:

Les élèves calculent une vitesse moyenne.

Exercice 4:

Les élèves calculent une distance.

Exercice 5:

Les élèves calculent une durée.

Exercices et problèmes

Exercices 1 à 9

Portent sur des situations de proportionnalité :

- Compléter un tableau de proportionnalité;
- Calculer un produit en croix;
- Calculer une quatrième proportionnelle;
- Faire des calculs dans une situation de proportionnalité.

Exercices 10 à 20

Portent sur la représentation graphique d'une situation de proportionnalité

Exercices 21 à 29

Présentent des situations de proportionnalité.

QCM pour s'évaluer.

Ce QCM permet aux élèves de vérifier leur degré d'acquisition des notions traitées dans la leçon.

Répondre correctement aux items du QCM est un indice de l'atteinte par les élèves des objectifs de la leçon. Des erreurs ou des difficultés dans les réponses à ces items doivent inciter les élèves à revoir leurs cours, approfondir leur compréhension. L'enseignant doit aussi tirer profit de ce QCM pour réguler son enseignement et prévoir des activités de remédiation et de renforcement des acquis de ses élèves.

16 Statistiques

Repères didactiques

Les activités relatives au traitement de données permettent de développer des compétences mathématiques, et plus particulièrement la capacité à communiquer, à représenter et à exercer son esprit critique, participant ainsi à la formation de citoyens éclairés et responsables.

L'objectif est de fournir aux élèves des méthodes, d'une part pour comprendre les informations qu'ils rencontrent dans différents contextes sous la forme de tableaux, de graphiques ou de diagrammes, et d'autre part pour synthétiser et représenter sous une forme adaptée des données chiffrées qu'ils sont amenés à recueillir ou consulter, et en donner des résumés en utilisant quelques caractéristiques simples de statistique descriptive.

En première année du collège ont été traitées les notions suivantes : pourcentage; tableau, représentation graphique de données, diagramme, histogramme; effectifs, fréquences ; effectifs cumulés, fréquences cumulées.

Cette année, ces notions seront reprises en plus de la notion de moyenne..

Objectifs d'apprentissage

- Lire, utiliser et intérpreter des données à partir d'un tableau ;
- Organiser des données en choisissant un tableau adapté ;
- Lire, utiliser et intérpreter un graphique, un diagramme circulaire ;
- Calculer des effectifs et des effectifs cumulés ;
- Calculer des fréquences et des fréquences cumulées ;
- Calculer des moyennes.

Je vérifie mes prérequis

Dans ce QCM, on vérifie les prérequis relatifs à des savoir-faire en calcul et sur des apprentissages des élèves sur notions statistiques et sur une perception intuitive des élèves sur la moyenne.

Activités de découverte

Activité 1

A partir d'un histogramme donnant les tailles des élèves d'une classe de la 2ème année collège, les élèves complètent un premier tableau des effectifs et des fréquences et un deuxième tableau sur les effectifs cumulés et leurs fréquences.

A partir d'un autre tableau présentant les effectifs cumulés sur les tailles d'une autre classe de 2ème année collège, les élèves complètent le tableau des effectifs correspondants.

A partir d'un troisième tableau donnant les fréquences cumulées sur les tailles d'une troisième classe de 2ème année collège, les élèves complètent le tableau correspondant des effectifs et des fréquences.

Activité 2

Dans cette activité les élèves calculent une moyenne de notes dans différentes situations :

- Moyennes d'élèves en mathématiques;
- Moyenne d'une classe;
- Moyennes pondérées.

Activité 3

A partir d'un diagramme circulaire divisé en douze parties égales et coloriées selon la proportion et le sport pratiqué, les élèves complètent un tableau d'effectifs.

Activité 4

Il s'agit de compléter la représentation d'un histogramme à partir du tableau d'effectifs.

Activité 5

Les élèves redécouvrent que les situations de vitesse moyenne sont des situations de proportionnalité, mais l'unité la plus adaptée n'est pas toujours le km/h dans toutes les situations.

Cours

Des activités que les élèves ont traitées : ils définissent :

- L'effectifs d'une valeur;
- La fréquence d'une valeur;
- L'effectif cumulé croissant;
- La fréquence cumulée croissante;
- La moyenne d'une série statistique.

Ils représentent des données fournies :

- Par catégories à l'aide de diagrammes en barres, en bandes et des diagrammes circulaires;
- En valeurs numériques par des tableaux, des diagrammes en bâtons, des histogrammes et des diagrammes circulaires.

Exercices résolus

Exercice 1

Les élèves dressent un tableau pour une série de notes et calculent les effectifs cumulés et les fréquences cumulées en pourcentage et ils tracent le diagramme en bâtons de cette série.

Exercice 2

Les élèves répondent à des questions en expliquant les données d'un tableau d'effectifs.

Exercice 3

Les élèves dressent un tableau d'effectifs à partir d'un tableau d'effectifs cumulés.

Exercice 4

Les élèves calculent une moyenne de sauts en longueur.

Exercice 5

Il s'agit de calculer à partir d'un tableau, une moyenne pondérée.

Exercice 6

Il s'agit de calculer une moyenne à partir d'un diagramme en barres.

Exercice 7

Les élèves construisent un diagramme circulaire en utilisant les données d'un tableau d'effectifs.

Exercice 8

Les élèves utilisent un tableau pour calculer : des effectifs, des effectifs cumulés, des fréquences, des fréquences cumulées croissantes et des moyennes pondérées.

Exercices et problèmes

Les exercices et les problèmes proposés portent sur le calcul d'effectifs, de fréquences, d'effectifs cumulés croissants de fréquences cumulées croissantes, de moyennes et de moyennes pondérées.

Dans ces exercices aussi, les élèves représentent des diagrammes en barre, des histogrammes et des diagrammes circulaires.

QCM pour s'évaluer.

Ce QCM permet aux élèves de vérifier leur degré d'acquisition des notions traitées dans la leçon.

Répondre correctement aux items du QCM est un indice de l'atteinte par les élèves des objectifs de la leçon. Des erreurs ou des difficultés dans les réponses à ces items doivent inciter les élèves à revoir leurs cours, approfondir leur compréhension. L'enseignant doit aussi tirer profit de ce QCM pour réguler son enseignement et prévoir des activités de remédiation et de renforcement des acquis de ses élèves.

Bibliographie

1. Gabriel Labédie et Guy Amossé constructivisme ou socioconstructivisme

   http://www.schule.suedtirol.it/blikk/angebote/reformpaedagogik/rp701construct.htm

2. Isabelle Girault, 2007 Théories d'apprentissage et Théories didactiques Cours de master IC2A / Spécialité didactique des sciences

   http://imss-www.upmf-grenoble.fr/prevert/SpecialiteDEMS/Cours%202007/UE1/Theories_Apprentissage_master.pdf

3. Stanislas Dehaene Les grands principes de l'apprentissage Collège de France et Unité INSERM-CEA de Neuro NeuroSpin Center, Saclay, France

   http://www.college-de-france.fr/media/stanislas-dehaene/UPL4296315902912348282_Dhaene_GrandsPrincipesDeLApprentissage_CollegeDeFrance2012.pdf

4. Morais Cours de psychologie cognitive – ULB

   http://dev.ulb.ac.be/bepsy/cms/index.php?option=com_docman&task=cat_view&gid=74&mosmsg=You+are+trying+to+access+from+a+non-authorized+domain.+%28www.google.com%29

5. Système mnésique- mémoires

   http://www.noesis-reseau.com/wp-content/uploads/2014/07/5-SYST%C3%88ME-MN%C3%89SIQUE.pdf

6. A. Naceur Psychologie cognitive, Université de Tunis Institut Supérieur de l'Education et de la Formation Continue Année 2006/2007

   http://pf-mh.uvt.rnu.tn/60/1/psychologie-cognitive.pdf

7. Hervé Larroze-Marracq Apprentissages scolaires et construction des connaissances de Piaget à Vygotsky,

   https://halshs.archives-ouvertes.fr/file/index/docid/958752/filename/Apprentissages_scolaires_et_construction_des_connaissances_de_Piaget_A_Vygotsky_1996.pdf

8. Le socio-constructivisme

   http://gamosse.free.fr/socio-construct/Rp70110.htm

9. Brousseau Guy La théorie des situations didactiques

   http://math.unipa.it/~grim/brousseau_montreal_03.pdf

10. La théorie des situations didactiques de Guy Brousseau

    Eroditi.free.fr/Enseignement/DDML3S1_08-09/DDML30809S1_C5_TSDb.pdf

11. Fiches de didactique des mathématiques

    https://preparerlecrpe.com/2015/10/14/fiches-didactique-des-mathematiques/

12. Karine Robinault Différentes approches de l'enseignement et de l'apprentissage : Approches transmissive, béhavioriste, gestalstiste, constructiviste et socio-constructiviste pour l'apprentissage et l'enseignement – 2007

    http://imss-www.upmf-grenoble.fr/prevert/SpecialiteDEMS/Cours%202009-2010/Enseignement%20et%20apprentissage%20doc%20N&B.pdf

13. Hugues Lenoir, de la pédagogie à l'andragogie
http://www.hugueslenoir.fr/de-la-pedagogie-a-landragogie/

14. Situation-problème, activité
https://gpc-maths.org/data/images/situationpbdef.pdf

15. Guides de la collection « Pour comprendre les mathématiques » Primaire

16. Ressources d'accompagnement du programme de mathématiques (cycle 4) http://eduscol.education.fr/cid99696/ressources-maths-cycle.html

17. Documents d'accompagnement des programmes de mathématiques cycle 4 2016
http://db.vdb.free.fr/bribes/SYMAX/mes_pdf/La%20sym%E9trie%20axiale%20%28A4%29.pdf
https://irempt.ucad.sn/images/Lanotiondevecteuraucollege.pdf

18. Teresa ASSUDE RACINES CARREES : CONCEPTIONS ET MISES EN SITUATIONS D'ELEVES DE QUATRIEME ET TROISIEME I.R.E.M. d'Aix-Marseille
http://www-irem.ujf-grenoble.fr/revues/revue_x/fic/20/20x1.pdf

19. Mettre l'accent sur l'enseignement des mathématiques : Sept principes fondamentaux pour améliorer l'enseignement des mathématiques, de la maternelle à la 12ème année
http://www.edu.gov.on.ca/fre/teachers/studentsuccess/FoundationPrincipalsFr.pdf

20. OUAHIDI My Mohamed et ELAOUFI Mounir (2017) L'Univers des Maths, Manuel de l'élève 2ème année du cucle secondaire collégial. Collection Maarif Collège. Dar Nachr Al Maarifa.

21. BKOUCHE R, CHARLOT B, ROUCHE N, (1991) Faire des mathématiques : le plaisir du sens. Armand Colin, Paris.

22. BROUSSEAU G, (1982) « Les objets de la didactique des mathématiques », Actes de la 2ème école d'été de didactique des mathématiques. IREM d'Orléans.

23. BROUSSEAU G, (1986) « Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques », Recherches en didactique des mathématiques, vol. 7-2. La Pensée sauvage, Grenoble.

24. BROUSSEAU G, (1983) « Obstacles épistémologiques en mathématiques », Recherches en didactique des mathématiques, vol. 4-2. La Pensée sauvage, Grenoble.

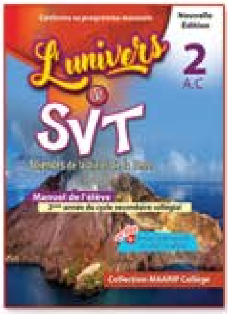
25. CHARNAY R, (1992) «Traitement des erreurs en mathématiques et stratégies de différenciation», Repères, n°5.

26. CHARNAY R, (1987) « Apprendre par la résolution de problèmes », Grand N, n°42. CRDP de Grenoble.

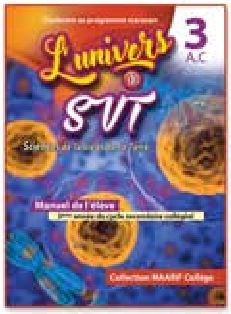
SVT

MANUEL DE L'ÉLÈVE

1ère année collège



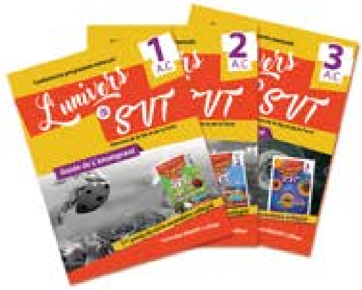
2ème année collège



3ème année collège

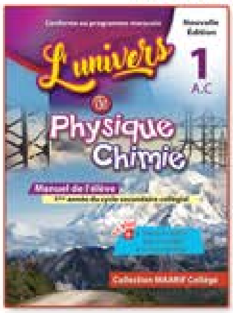
+

GUIDES PEDAGOGIQUES

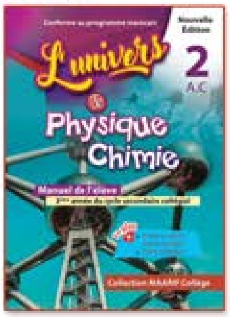


PHYSIQUE - CHIMIE

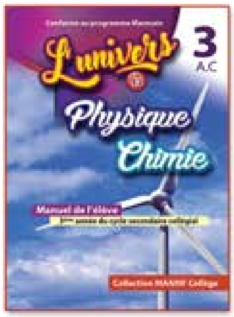
MANUEL DE L'ÉLÈVE



1ère année collège



2ème année collège



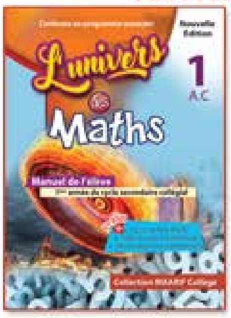
3ème année collège

+

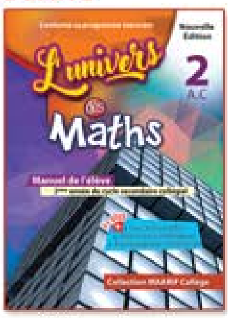
GUIDES PEDAGOGIQUES

MATHEMATIQUES

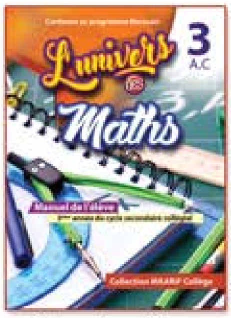
MANUEL DE L'ÉLÈVE



1ère année collège



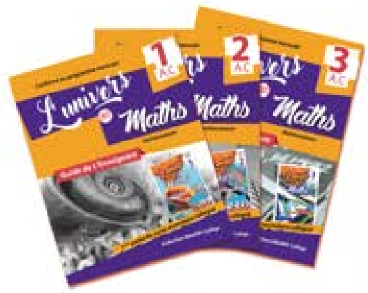
2ème année collège

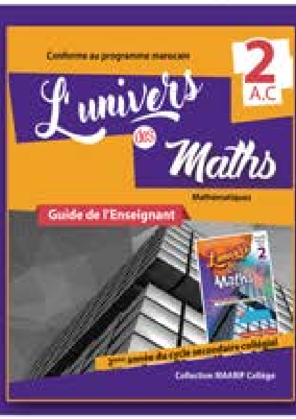


3ème année collège

+

GUIDES PEDAGOGIQUES





Guide pédagogique

Un guide vous sera offert pour chaque niveau *.

* Offre réservée aux enseignants.

LIBRAIRIE AL MAARIF

Rue Bab Chellah, devant la grande Mosquée - B.P. : 239 - RABAT

Tél. : (212) 05 37 73 07 01 - (212) 05 37 72 65 24

Fax : 05 37 20 01 37

E-mail : manuel.maarifcollege@gmail.com

ISBN 978-9954-688-72-4