Fiche de cours : Les droites remarquables dans le triangle.

Classe : 2ème année parcours international collégial.

Date : 28/12/2020

Prof : Bouchida Rachid

Cours n° : 7

Matière : Mathématiques

Objectifs

- Reconnaître les médiatrices, médianes, hauteurs, bissectrices d'un triangle.

- Construire les droites remarquables d'un triangle.

- Connaître la terminologie relative aux points de concours des différentes droites remarquables dans un triangle.

- Utiliser les propriétés des droites remarquables dans un triangle pour résoudre des problèmes.

Prérequis

- La symétrie centrale et la symétrie axiale.

- Propriétés des quadrilatères particuliers.

- Cercle, rayon et tangente.

- Médiatrice et hauteur.

Extensions

- Le triangle rectangle et le cercle.
- La géométrie analytique.

Contenu de cours

- Les médiatrices d'un triangle.

- Les hauteurs d'un triangle.

- Les bissectrices d'un triangle.

- Les médianes d'un triangle.

-Le centre de gravité.

Les moyens didactiques

- Livre scolaire – tableau – craie – règle – calculatrice – compas.

Volume horaire

Les droites remarquables dans le triangleg.	8h

Les médiatrices d'un triangle.

Objectifs	Activité	Remarques
Connaître la médiatrice d'un triangle et ses propriétés.	**Activité : 1** Voir fichier ci-dessous.	Durée : 20 min

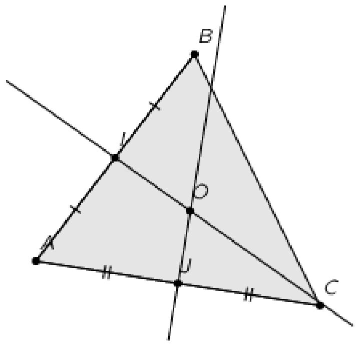
Activité :1

Partie A : Expérimentation

1. Construire un triangle dont les côtés ont pour longueurs 12 cm, 9 cm et 10 cm.
2. Construire les médiatrices de deux côtés. Noter O leur point d'intersection.
3. Construire le cercle de centre O passant par l'un des sommets. Que constate-t-on ?
4. Construire la médiatrice du troisième côté. Que constate-t-on ?

Partie B : Démonstration

Sur la figure ci-dessous, les médiatrices des segments $[AB]$ et $[AC]$ se coupent en O.



1. Recopier et compléter en justifiant :
   (a) « O appartient à la médiatrice de $[AB]$ donc $OA = \dots$ » ;
   (b) « O appartient à la médiatrice de $[AC]$ donc .... »
2. Expliquer alors pourquoi :
   (a) le cercle de centre O passant par A passe aussi par B et C ;
   (b) le point O appartient à la médiatrice de $[BC]$.

-Complète:

— Les médiatrices des trois côtés d'un triangle se coupent ....: on dit qu'elles sont *concourrantes*.
— Ce point commun est le centre d'un cercle passant par..............................du triangle. On dit que ce cercel est le *cercle circonscrit au triangle*.

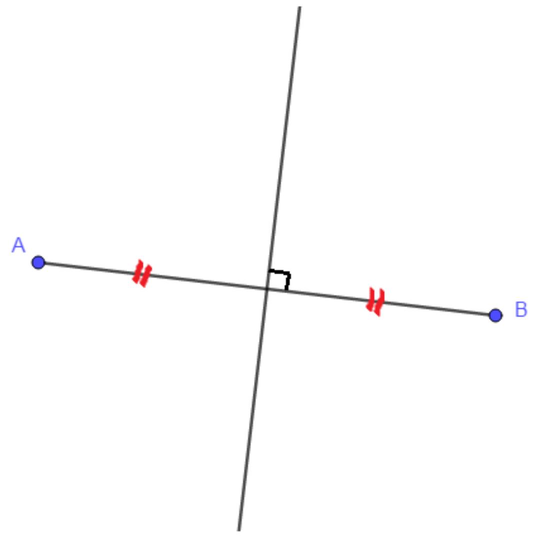
Résumé de cours	Remarques

I) – Médiatrices d'un triangle.

a) – Médiatrice d'un segment.

Définition: 1

> **La médiatrice d'un segment est la droite perpendiculaire à ce segment en son milieu.**



La droite (Δ) est la médiatrice du segment $[AB]$.

b) – Médiatrice d'un triangle.

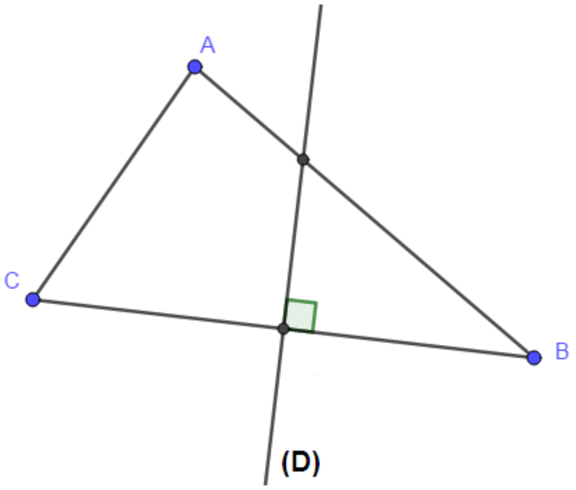
Définition: 2

> **La médiatrice d'un triangle est la médiatrice de l'un de ses côtés.**

Durée : 20 min

Résumé de cours	Remarques

Exemple:



La droite (D) est la médiatrice du segment $[BC]$.

Dans ce cas la droite (D) s'appelle la médiatrice du triangle ABC.

Propriété: 1

Les médiatrices d'un triangle se coupent en un seul point, on dit qu'elles sont councourantes.

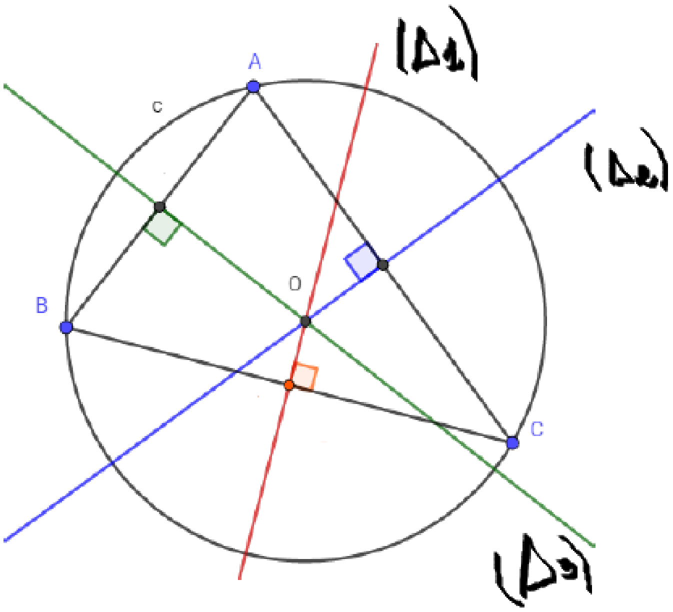
Le point de concours des médiatrices est le centre d'un cercle passant par les trois sommets de ce triangle.

Ce cercle est appelé cercle circonscrit au triangle.

Durée : 20 min

Résumé de cours	Remarques

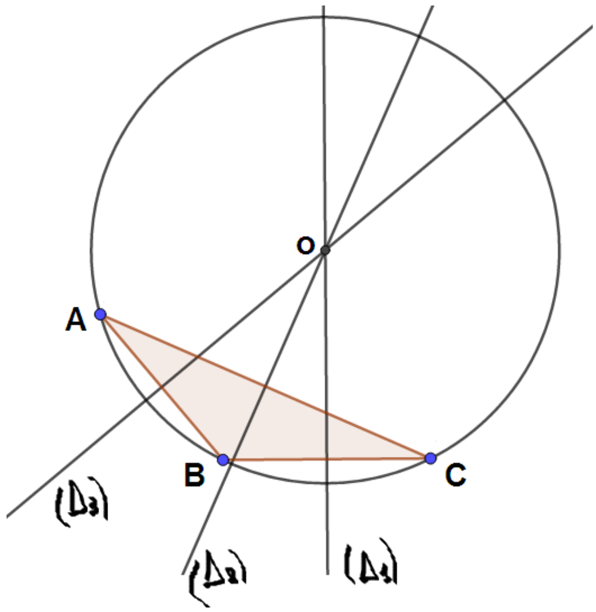
Exemple:



Le point O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

Remarque: 1

Si l'un des angles du triangle est obtus alors le centre du cercle circonscrit au triangle est à l'extérieur du triangle.



Durée : 20 min

Application	Remarques
Exercice d'application* : 1** ***ABC un triangle tel que* :** $AB = 3cm$; $AC = 6cm$ 1) – ***Construire les médiatrices du triangle ABC. 2) – ***Construire le cercle circonscrit au triangle ABC.***	**Durée : 15 min**

Les hauteurs d'un triangle.

Ojectifs	Activité	Remarques
Connaître la hauteur d'un triangle et ses propriétés.	**Activité : 2** **Voir fichier ci-dessous.**	**Durée : 20 min**

Activité:2

Hauteurs d'un triangle

1. Construire un triangle ABC tel que $AB = 6$ cm, $BC = 8$ cm et $AC = 12$ cm.
2. Dans un triangle ABC, on dit que (AT) est une hauteur du triangle issue du point A si $T \in [BC]$ et (AT) est perpendiculaire à (BC) (cette droite passe donc par le sommet A du triangle).

   Construire la hauteur issue de A et la hauteur issue de B. On note H leur point d'intersection.
3. Que peut-on conjecturer pour la droite (CH) ?

Résumé de cours	Remarques

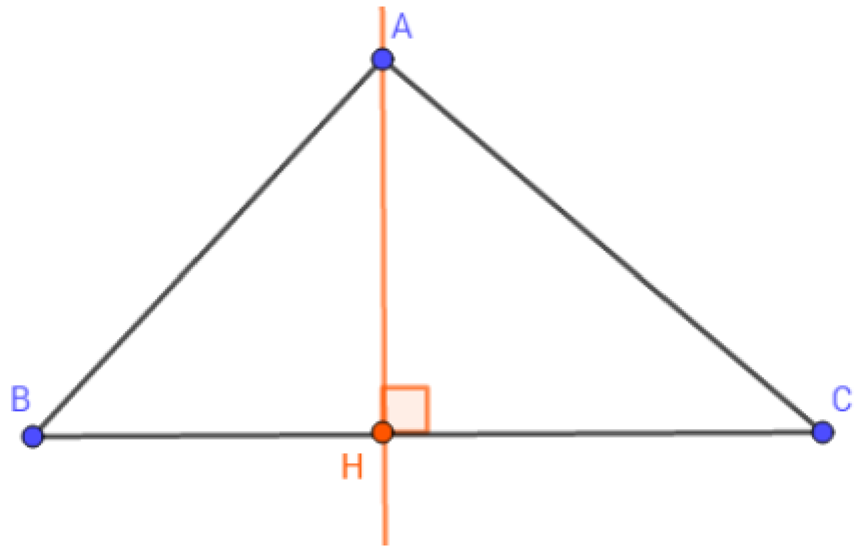
II) – Hauteurs d'un triangle.

Définition: 3

Dans un triangle, une hauteur est une droite passant par un sommet et perpendiculaire au côté opposé.

Exemple :

ABC un triangle.



La droite (AH) passe par le point A et perpendiculaire au côté opposé du point A en point H. On appelle (AH) la hauteur du triangle ABC.

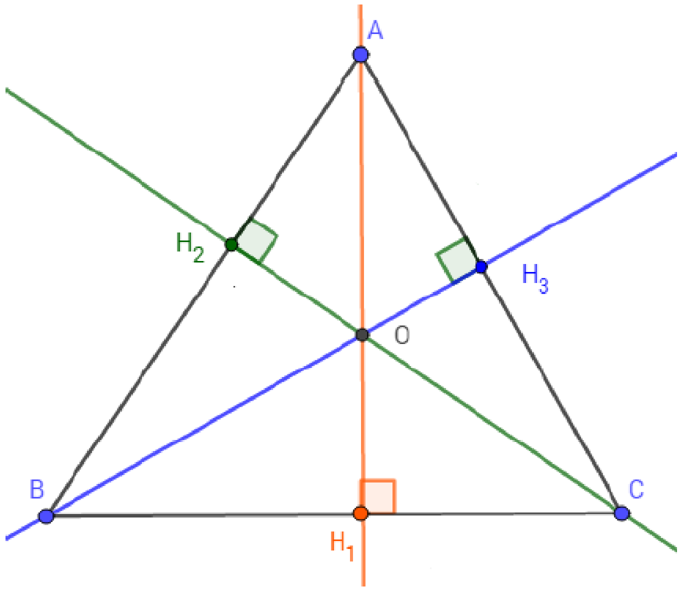
Propriété: 2

Dans un triangle, les 3 hauteurs sont concourantes en un point appelé orthocentre du triangle.

Durée : 20 min

Résumé de cours	Remarques

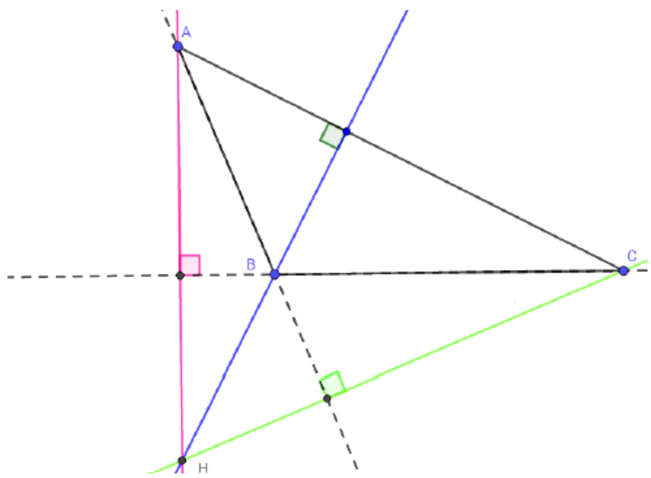
***Exemple*:**



Les 3 hauteurs du triangle ABC se coupent en un seul point O, appelé orthocentre du triangle ABC.

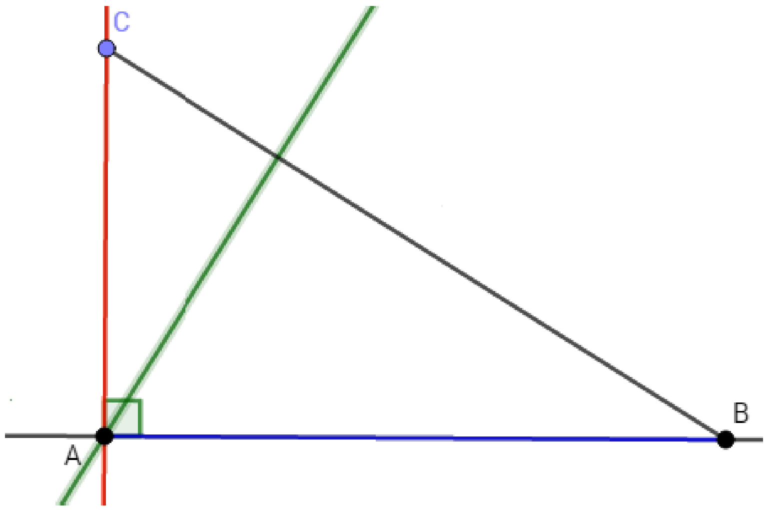
***Remarque*: 2**

■***Si l'un des angles du triangle est obtus alors l'orthocentre du triangle est à l'extérieur du triangle.***



■***L'orthocentre d'un triangle rectangle est le sommet de l'angle droit.***

Durée : 20 min

Résumé de cours	Remarques
	Durée : 20 min

Application	Remarques
***Exercice d'application* : 2** ABC *un triangle tel que* : $AB = 3cm\ ;\ AC = 2cm\ et\ BC = 4cm$ $1) - Construire\ l'othocentre\ du\ triangle\ ABC.$	Durée : 15 min

Les bissectrices d’un triangle.

Ojectifs	Activité	Remarques
Connaître la bissectrice d’un triangle et ses propriétés.	Activité : 3 Voir fichier ci-dessous.	Durée : 20 min

Activité:3

BISSECTRICES D’UN TRIANGLE.

A. Définition :

La **bissectrice d’un angle** est …….. droite qui partage cet angle en 2 angles de même ………………..

remarques :

- Puisqu’un triangle a 3 angles, alors il y a …… bissectrices dans un triangle.
- On dit parfois bissectrice relative à un sommet : elle passe par ce sommet.

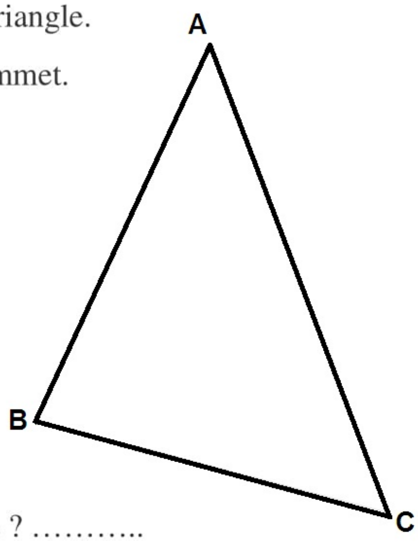


Figure :

- Tracer les 3 bissectrices pour le triangle ci contre.

Que remarquez vous ? …………………………………

Appelez I le point de concours.

- Projetez I perpendiculairement sur l’un des côtés.

Appelez M ce projeté.

Tracez le cercle de centre I et de rayon IM.

Ce cercle intérieur au triangle semble-t-il tangent aux 3 côtés du triangle ? ………..

B. Concourance des 3 bissectrices d’un triangle :

- Les 3 bissectrices d’un triangle ABC se ………………………….. (sont concourantes) en un point I.
- Ce point I est le centre d’un cercle intérieur au triangle ABC appelé **cercle inscrit au triangle ABC.**
- Ce cercle inscrit est tangent aux 3 côtés du triangle.

Autrement dit, son centre I est équidistant des 3 côtés du triangle ABC.

remarques :

- 2 bissectrices suffisent pour construire le cercle ………………………..
- Attention : une bissectrice coupe-t-elle forcément le côté opposé en son milieu ? Oh que ……….. !

Résumé de cours	Remarques

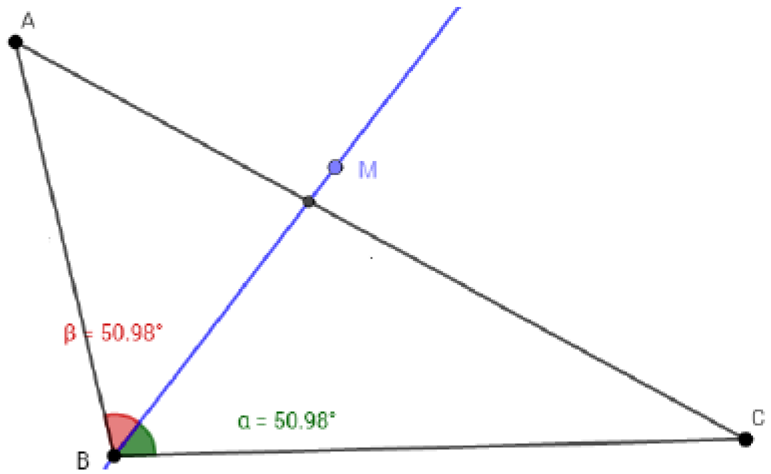
$III) - Bissectrices\ d'un\ triangle.$

$Définition: 4$

$La\ bissectrice\ d'un\ triangle\ est\ la\ demi-droite\ qui\ partage\ cet\ angle\ en\ deux\ angles\ de\ mêmes\ mesures.$

$Exemple:$

$ABC\ un\ triangle.$



$On\ appelle\ la\ demi-droite\ [BM)\ la\ bissectrice\ de\ l'angle\ \widehat{ABC}.$

$Remarque: 3$

$La\ bissectrice\ d'un\ triangle\ est\ la\ bissectrice\ de\ l'un\ de\ ses\ angles.$

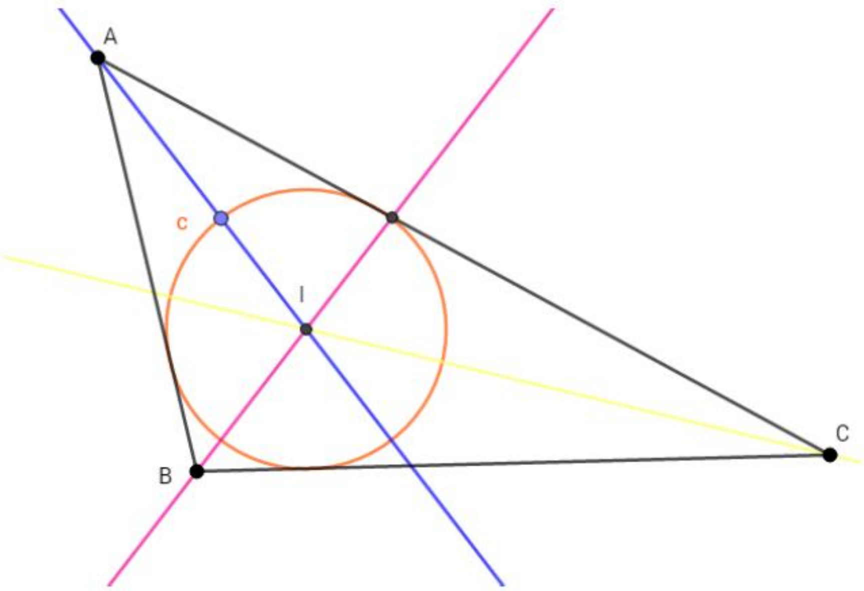
Durée : 20 min

Résumé de cours	Remarques

Propriété: 3

Dans un triangle, les bissectrices des 3 angles sont concourantes en un point qui est le centre du cercle inscrit à ce triangle.

Exemple :



Les trois bissectrices du triangle ABC se coupent en un seul point I, qui est le centre du cercle inscrit à ce triangle.

Durée : 20 min

Application	Remarques
***Exercice d'application* : 3** *ABC un triangle tel que* : $\widehat{ACB} = 60°$; $\widehat{ABC} = 80$ *et* $BC = 4cm$ *−Construire le cercle inscrit dans le triangle ABC.*	**Durée :** **15 min**

Les médianes d'un triangle et centre de gravité.

Ojectifs	Activité	Remarques
Connaître la médiane d'un triangle et ses propriétés.	**Activité : 4** **Voir fichier ci-dessous.**	**Durée :** **20 min**

Activité:4

Médiatrices d'un triangle

1. Construire un triangle ABC tel que $AB = 14$ cm, $BC = 12$ cm et $AC = 10$ cm.
2. Dans un triangle ABC, on dit que (AI) est une médiane issue du point A si I est le milieu de $[BC]$ (cette droite passe par le sommet A du triangle).
   Construire la médiane issue du point A et la médiane issue du point B. On note G leur point d'intersection.
3. Que peut-on conjecturer pour la droite (CG) ?
4. Placer les milieux respectifs A', B', C' de $[BC]$, $[AC]$, $[AB]$. Mesurer les longueurs AG, GA', BG, GB', CG et GC'.
   Quelle remarque peut-on faire ?

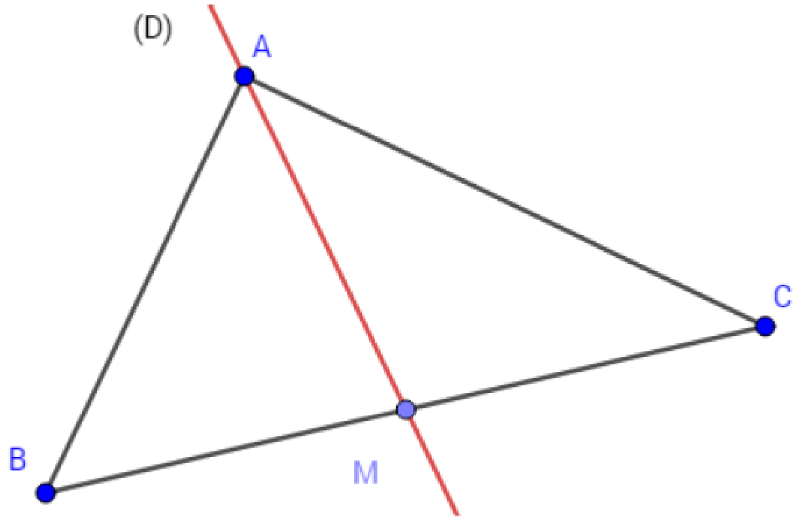
Résumé de cours	Remarques

IV) – Médianes d'un triangle.

Définition : 5

Dans un triangle, une médiane est une droite qui passe par un sommet et par le milieu du côté opposé.

Exemple :



La droite (D) qui passe par le point A et le milieu du segment [BC], s'appelle une médiane.

Remarque :4

Chaque médiane partage le triangle en deux triangles de même aire.

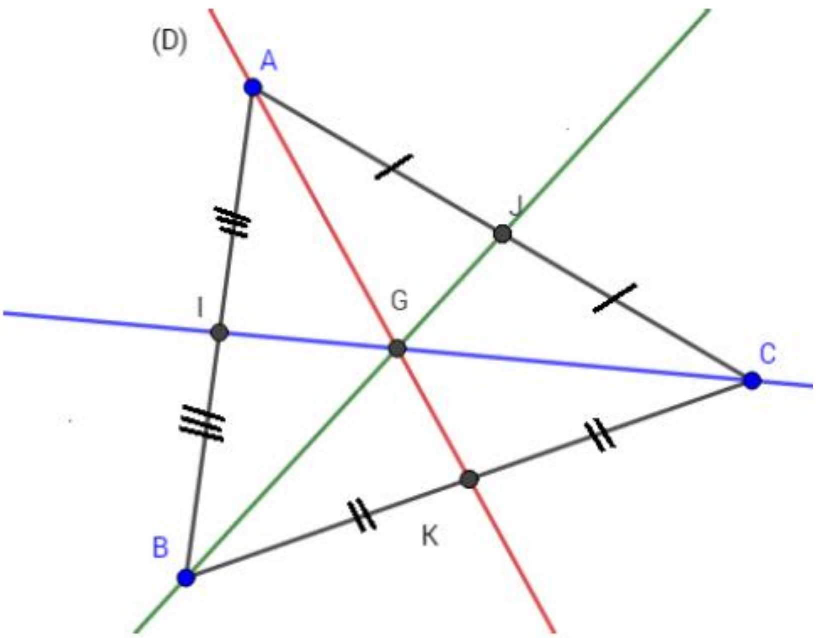
Durée : 20 min

Résumé de cours	Remarques
	Durée : 20 min

Propriété: 4

Dans un triangle, les trois médianes sont concourantes en un point qui est le centre de gravité de ce triangle.

Exemple:



Le point G s'appelle le centre de gravité du triangle ABC.

V) – Centre de gravité d'un triangle.

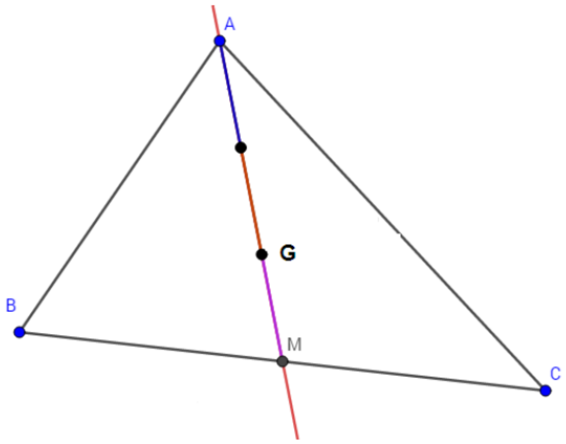
Propriété: 5

Le centre de gravité d'un triangle est situé au deux tiers $\frac{2}{3}$, à ***partir du sommet de chaque segment médiane.***

Résumé de cours	Remarques

Exemple :

Si ABC un triangle et G son centre de gravité et M le milieu du segment $[BC]$.



Alors : $AG = \frac{2}{3}AM$ ***et*** $GM = \frac{1}{3}AM$

Durée : 20 min

Application	Remarques

Exercice d'application : 4

ABC un triangle, tel que :

$AC = 7,3cm$; $AB = 12cm$ *et* $BC = 8cm$

−Construires les médianes du triangle ABC.

Exercice d'application : 5

ADC un triangle, tel que :

$AD = 4,5cm$; $DC = 3cm$

I est le milieu du segment $[AC]$.

B est le symétrique du point C par rapport à D.

La droite (BI) coupe (AD) en G.

1) − Construire la figure.

2) − Montrer que le point G est le centre de gravité du triangle ABC.

3) − Calcule la longueur AG.

Durée : 15 min