MATHÉMATIQUES

Notions d'arithmétique

Yassine Aouami

version étudiant(e) 2.0

Tronc Commun Scientifique

LaTeX

Sommaire

I Premiers concepts

1. Rappel et notation

- **Les nombres entiers naturels** 0, 1, 2, 3, 4, 5,... forment un **ensemble infini**, on le note $\mathbb{N}$:
$$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; ...\}$$
- On note $\mathbb{N}^*$, ou encore $\mathbb{N}$-$\{0\}$, **l'ensemble des entiers naturels non nuls**, et on écrit :
$$\mathbb{N}^* = \{1; 2; 3; 4; ...\}$$
et on a «$\mathbb{N}^* \subset \mathbb{N}$», se lit «$\mathbb{N}^*$ **est inclus dans** $\mathbb{N}$».
- Soit a un nombre quelconque.
  - La notation «$a \in \mathbb{N}$» signifie que le nombre «a **est un élément de** $\mathbb{N}$», ou encore «a **appartient à** $\mathbb{N}$».
  - La notation «$a \notin \mathbb{N}$» signifie que «**le nombre** a **n'est pas un élément de** $\mathbb{N}$», ou encore «a **n'appartient pas à** $\mathbb{N}$».

Exemples :

- On a «$7 \in \mathbb{N}$» et «$404 \in \mathbb{N}$», car les deux nombres 7 et 404 sont des entiers naturels.
- On a «$2.6 \notin \mathbb{N}$» et « $-5 \notin \mathbb{N}$», car les deux nombres 2.6 et -5 ne sont pas des entiers naturels.

2. Multiples et diviseurs d'un entier naturel

Définition

Soit $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$.

On dit que b **divise** a, **noté** b/a, s'il existe un entier naturel k tel que : $\quad a = b \times k$

On dit aussi que b est un **diviseur** de a, ou encore que a est **multiple de** b.

Remarques :

- L'élément 0 est multiple de tout entier naturel, et ne peut pas être diviseur d'aucun entier.
- L'élément 1 divise tout entier naturel.
- Tout entier naturel a non nul est toujours divisible par 1 et lui-même.
- On désigne par $D(a)$ l'ensemble des diviseurs de a, et par $M(a)$ l'ensemble des multiples de a.

Exemples :

- On a 8 est un multiple de 4, car $8 = 4 \times 2 \ (k = 2)$.
- On a 17 est un diviseur de 51, car $51 = 17 \times 3 \ (k = 3)$.
- Les nombres 1, 3, 17 et 51 sont exactement les diviseurs de 51, et on écrit : $D(51) = \{1; 3; 17; 51\}$
- Les nombres 0, 4, 8, 12, 16,... sont les multiples de 4, et on écrit : $M(4) = \{0; 4; 8; 12; 16; ...\}$ ou encore $M(4) = \{4 \times k, \text{ où } k \in \mathbb{N}\}$.

3. Nombres pairs - Nombres impairs

Définition

Soit $a \in \mathbb{N}$.

1. On dit que a est un **nombre pair** s'il existe un entier naturel k tel que $a = 2k$.
   Autrement dit, si 2 divise a.
2. On dit que a est un **nombre impair** s'il existe un entier naturel k tel que $a = 2k + 1$.
   Autrement dit, si 2 ne divise pas a.

Exemples :

- On a 10 est un nombre pair, car $10 = 2 \times 5$.
- On a 101 est un nombre impair, car $101 = 2 \times 50 + 1$.

II Les nombres premiers

1. Nombre premier

Définition

On dit qu'un entier naturel a est un nombre **premier** s'il possède exactement deux diviseur distincts : 1 et lui même.
Autrement dit, si $D(a) = \{1; a\}$

Exemples :

- 19 est un nombre premier, car $D(19) = \{1; 19\}$.
- 45 n'est pas un nombre premier, car $D(45) = \{1; 3; 5; 9; 15; 45\}$.

0	1	**2**	**3**	4	**5**	6	**7**	8	9
10	**11**	12	**13**	14	15	16	**17**	18	**19**
20	21	22	**23**	24	25	26	27	28	**29**
30	**31**	32	33	34	35	36	**37**	38	39
40	**41**	42	**43**	44	45	46	**47**	48	49
50	51	52	**53**	54	55	56	57	58	**59**
60	**61**	62	63	64	65	66	**67**	68	69
70	**71**	72	**73**	74	75	76	77	78	**79**
80	81	82	**83**	84	85	86	87	88	**89**
90	91	92	93	94	95	96	**97**	98	99

Liste des nombres premiers inférieur à 100

Remarques :

- 0 et 1 ne sont pas des nombres premiers.
- Tout nombre **pair** différent de 2 n'est pas un nombre premier.
- Tout nombre premier strictement supérieur à 2 est un nombre **impair**.
- Il existe une **infinité** de nombres premiers.

Méthode

Pratiquement, pour montrer qu'un entier naturel a est premier, il suffit de vérifier qu'il n'admet aucun diviseur parmi les nombres premiers successifs $(2, 3, 5, 7, 11, ...)$ jusqu'à $\sqrt{n}$.

Exemples :

- 119 est-il un nombre premier ?

  D'abord On a $\sqrt{119} \simeq 10.9$. En utilisant la division euclidienne, on vérifie que 119 n'est pas divisible par aucun des nombres premiers 2, 3, 5 et 7, donc 119 est premier.

- 283 est-il un nombre premier ?

  D'abord On a $\sqrt{283} \simeq 16.8$. En utilisant la division euclidienne, on vérifie que 283 n'est pas divisible par aucun des nombres premiers 2, 3, 5, 7, 11 et 13, donc 283 est premier.

- 381 est-il un nombre premier ?

  On a 381 est divisible par 3 $\big(281 = 3 \times 127\big)$, donc 381 n'est pas premier.

2. Décomposition en produit de facteurs premiers d'un entier naturel

Théorème

Tout entier naturel a strictement supérieur à 1, s'écrit d'une façon unique sous la forme d'un produit des nombres premier.
On dit qu'il est décomposé en produit de facteurs premiers.

Exemples :

Décomposons 168 et 825 en produit de facteurs premiers.
On va diviser successivement le nombre à décomposer par les nombres premiers pris dans l'ordre croissant $(2, 3, 5, 7, 11, ...)$.

- La décomposition du nombre 168 :

  On remarque que 168 est divisible par 2, alors $\boxed{168 = 2 \times 84}$

  Comme 84 n'est premier et divisible par 2, donc $\boxed{168 = 2 \times 2 \times 42 = 2^2 \times 42}$

  Et 42 est divisible par 2, d'où $\boxed{168 = 2^2 \times 2 \times 21 = 2^3 \times 21}$

  21 n'est un nombre premier, car $21 = 3 \times 7$, alors $\boxed{168 = 2^3 \times 3 \times 7}$

  La décomposition de 168 en produit de facteurs premiers est : $\boxed{168 = 2^3 \times 3 \times 7}$

- La décomposition du nombre 825 :

  On a $825 = 3 \times 275 = 3 \times 5 \times 55 = 3 \times 5 \times 5 \times 11$.

  donc $\boxed{825 = 3 \times 5^2 \times 11}$.

825	3
275	5
55	5
11	11

III PGCD et PPCM

1. Plus grand diviseur commun à deux nombres

Définition

Soit a et b deux entiers naturels.

Le plus grand diviseur commun à a et b est le **plus grand entier naturel** qui divise a et qui divise b, on le note $a \wedge b$ ou encore $\text{PGCD}(a; b)$.

Exemples :

- On a $D(27) = \{1; 3; 9; 27\}$ et $D(81) = \{1; 3; 9; 27; 81\}$

  Alors les diviseurs communs à 27 et 81 sont : 1, 3, 9, 27.

  D'où PGCD$(27; 81) = 27$, ou encore $27 \wedge 81 = 27$.
- On a $D(18) = \{1; 2; 3; 6; 9; 18\}$ et $D(105) = \{1; 3; 5; 7; 15; 21; 35; 105\}$

  Alors les diviseurs communs à 18 et 105 sont : 1, 3.

  D'où PGCD$(18; 105) = 3$, ou encore $18 \wedge 105 = 3$.
- On a $D(17) = \{1; 17\}$ et $D(97) = \{1; 97\}$

  Alors le seul diviseur commun à 17 et 97 sont : 1.

  D'où PGCD$(17; 97) = 3$, ou encore $17 \wedge 97 = 1$.

Remarques :

- Comme 1 divise tous les entiers naturels, alors $a \wedge b \geq 1$.
- Le PGCD de deux nombre premiers est toujours égale à 1.

Propriété

Soit $a \in \mathbb{N}$.

1. $a \wedge a = a$.
2. $a \wedge 1 = 1$.
3. $a \wedge 0 = a$.
4. Si un entier naturel b divise a, alors $a \wedge b = b$.

Méthode

Soit a et b deux entiers naturels.

Le PGCD de a et b est le produit des facteurs premiers **communs** contenus dans leurs décompositions, qui ont **la plus petite puissance**.

Exemples :

- On a : $80 = 2^4 \times 5$ et $315 = 2^2 \times 3^2 \times 5$

  On voit que 2 et 5 sont les facteurs premiers communs , donc on prend ces facteurs dont l'exposant est le petit, on trouve :

$$\mathrm{PGCD}(80;315) = 2^2 \times 5 = 20$$

- On a : $525 = 3 \times 5^2 \times 7$ et $210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$

  On voit que 3, 5 et 7 sont les facteurs premiers communs , donc on prend ces facteurs dont l'exposant est le petits, on trouve :

$$252 \wedge 210 = 3 \times 5 \times 7 = 105$$

2. Plus petit multiple commun à deux nombres

Définition

Soit a et b deux entiers naturels non nuls.

Le plus petit multiple commun à a et b est le **plus petit entier naturel non nul**, qui est multiple de a et b, on le note $a \vee b$ ou encore $\mathrm{PPCM}(a;b)$.

Exemples :

- On a $M(7) = \{0;7;14;21;28;...\}$ et $D(3) = \{0;3;6;9;12;15;18;21;...\}$

  Donc $\mathrm{PPCM}(7;3) = 21$, ou encore $7 \vee 3 = 21$.
- On a $M(15) = \{0;15;30;45;...\}$ et $M(30) = \{0;30;60;90;...\}$

  Donc $\mathrm{PPCM}(15;30) = 30$, ou encore $15 \wedge 30 = 30$.

Remarques :

- Le PPCM de deux nombre premiers est toujours égale leur produit.

Propriété

Soit $a \in \mathbb{N}$.

1. $a \vee a = a$.
2. $a \vee 1 = a$.
3. $a \vee 0 = 0$.
4. Si un entier naturel b divise a, alors $a \vee b = a$.

Méthode

Soit a et b deux entiers naturels.

Le PPCM de a et b est le produit de **tous** les facteurs premiers (**communs ou non**) contenus dans leurs décompositions, qui ont **la plus grande puissance**.

Exemples :

- On a : $80 = 2^4 \times 5$ et $315 = 2^2 \times 3^2 \times 5$

  On prend tous les facteurs premiers dont l'exposant est le grand, on trouve :

  $$\text{PPCM}(80; 315) = 2^4 \times 3^2 \times 5 = 720$$

- On a : $525 = 3 \times 5^2 \times 7$ et $210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$

  On prend tous les facteurs premiers dont l'exposant est le grand, on trouve :

  $$252 \vee 210 = 2 \times 3 \times 5^2 \times 7 = 1050$$

3. Relation entre PGCD et PPCM

Théorème

Soit a et b deux entiers naturels, on a

$$(a \wedge b) \times (a \vee b) = ab$$

Exemples :

- Soit a et b deux entiers naturels non nuls.

  Déterminons $a \wedge b$, sachant que $ab = 180$ et $a \vee b = 60$:

  On a $(a \wedge b) \times (a \vee b) = ab$, alors $a \wedge b = \dfrac{ab}{a \vee b} = \dfrac{180}{60} = 3$