

Chapitre 7

trigonométrie

I) Trigonométrie

1) Formules d'addition

Théorème 1 : Soit a et b deux angles quelconques, on a les relations

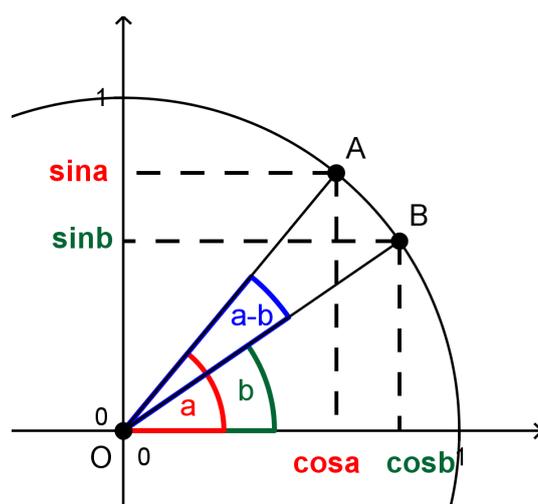
$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

Démonstration : Soit les point A et B sur le cercle unité :



Calculons le produit scalaire $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$ de deux façons différentes

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = OA \times OB \times \cos(a - b) = \cos(a - b)$$

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \begin{pmatrix} \cos a \\ \sin a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos b \\ \sin b \end{pmatrix} = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

On en déduit donc la deuxième formule :

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

Pour retrouver la première, il faut remplacer dans la formule ci-dessus b par $-b$, on obtient alors :

$$\cos[a - (-b)] = \cos a \cos(-b) + \sin a \sin(-b)$$

comme la fonction cosinus est paire et la fonction sinus impaire, on a :

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

Pour retrouver les formule avec le sinus, on utilise la formule qui permet de passer du cosinus au sinus, c'est à dire :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \sin(a + b) &= \cos\left[\frac{\pi}{2} - (a + b)\right] \\ &= \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - a\right) - b\right] \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \cos b + \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \sin b \end{aligned}$$

$$\text{Comme } \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin a \text{ et } \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos a$$

$$= \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

On retrouve la dernière formule en remplaçant b par $-b$ et compte tenu des parités des fonctions cos et sin, on obtient alors :

$$\begin{aligned} \sin[a + (-b)] &= \sin a \cos(-b) + \cos a \sin(-b) \\ \sin(a - b) &= \sin a \cos b - \cos a \sin b \end{aligned}$$

Exemple : En remarquant que :

$$\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}$$

calculer la valeur exacte de $\cos \frac{5\pi}{12}$ et $\sin \frac{5\pi}{12}$.

En appliquant les formules d'addition, on a :

$$\begin{aligned}\cos \frac{5\pi}{12} &= \cos \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \cos \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{6} \sin \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin \frac{5\pi}{12} &= \sin \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{6} \sin \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

Remarque : Pour se souvenir des formules d'addition, on peut remarquer :

- ⇨ Avec le cosinus on ne "panache pas" tandis qu'avec le sinus on "panache".
- ⇨ Avec le cosinus et $a + b$, on met un "moins" entre les deux termes. Avec le sinus pas de problème de signe

2) Formules de duplication

Théorème : Pour tout angle a , on a les relations :

$$\begin{aligned}\cos 2a &= \cos^2 a - \sin^2 a \\ &= 2 \cos^2 a - 1 \\ &= 1 - 2 \sin^2 a \\ \sin 2a &= 2 \sin a \cos a\end{aligned}$$

Démonstration : La formule sur le $\sin 2a$ est l'application directe des formules d'addition. Les formules sur le $\cos 2a$ font intervenir la relation entre \cos^2 et \sin^2 . En effet :

$$\begin{aligned}\cos 2a &= \cos(a + a) \\ &= \cos^2 a - \sin^2 a\end{aligned}$$

En appliquant la formule $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$, on obtient les deux formules suivantes

$$\begin{aligned} &= \cos^2 a - (1 - \cos^2 a) = 2 \cos^2 a - 1 \\ &= (1 - \sin^2 a) - \sin^2 a = 1 - 2 \sin^2 a \end{aligned}$$

Exemples :

1) Calculer $\cos 2x$ dans les deux cas suivants

a) $\cos x = \frac{3}{5}$

b) $\sin x = -\frac{1}{3}$

a) On ne connaît que le cosinus donc :

$$\begin{aligned} \cos 2x &= 2 \cos^2 x - 1 \\ &= 2 \left(\frac{3}{5} \right)^2 - 1 \\ &= 2 \times \frac{9}{25} - 1 \\ &= \frac{18 - 25}{25} \\ &= -\frac{7}{25} \end{aligned}$$

b) On ne connaît que le sinus donc :

$$\begin{aligned} \cos 2x &= 1 - 2 \sin^2 x \\ &= 1 - 2 \left(-\frac{1}{3} \right)^2 \\ &= 1 - 2 \times \frac{1}{9} \\ &= \frac{9 - 2}{9} \\ &= \frac{7}{9} \end{aligned}$$

2) a est un réel de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que :

$$\cos a = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$$

a) Calculer $\cos 2a$.

b) À quel intervalle appartient $2a$. Déduire alors a .

a) On ne connaît que le cosinus donc :

$$\begin{aligned}\cos 2a &= 2 \cos^2 a - 1 \\ &= 2 \left(\frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2} \right)^2 \\ &= 2 \times \frac{2 + \sqrt{3}}{4} - 1 \\ &= \frac{4 + 2\sqrt{3} - 4}{4} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

b) Comme $a \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ alors $2a \in [0; \pi]$, on en déduit donc :

$$2a = \frac{\pi}{6} \quad \text{et donc} \quad a = \frac{\pi}{12}$$

3) Formules de linéarisation

Théorème : Pour tout angle a on a les relations :

$$\begin{aligned}\cos^2 a &= \frac{1 + \cos 2a}{2} \\ \sin^2 a &= \frac{1 - \cos 2a}{2}\end{aligned}$$

Démonstration : Ces formules se déduisent directement des formules de duplication avec le $\cos 2a$. En effet :

$$\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1 \Rightarrow 2 \cos^2 a = 1 + \cos 2a \Rightarrow \cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$$

$$\cos 2a = 1 - 2 \sin^2 a \Rightarrow 2 \sin^2 a = 1 - \cos 2a \Rightarrow \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$

Exemple : Calculer $\cos \frac{\pi}{8}$ et $\sin \frac{\pi}{8}$.

On a :

$$\begin{aligned}\cos^2 \frac{\pi}{8} &= \frac{1 + \cos 2 \left(\frac{\pi}{8} \right)}{2} \\ &= \frac{1 + \cos \frac{\pi}{4}}{2} \\ &= \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} \\ &= \frac{2 + \sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

Comme $\cos \frac{\pi}{8} > 0$, on a

$$\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

De même, on a :

$$\begin{aligned} \sin^2 \frac{\pi}{8} &= \frac{1 - \cos 2\left(\frac{\pi}{8}\right)}{2} \\ &= \frac{1 - \cos \frac{\pi}{4}}{2} \\ &= \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} \\ &= \frac{2 - \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

Comme $\sin \frac{\pi}{8} > 0$, on a

$$\sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$