

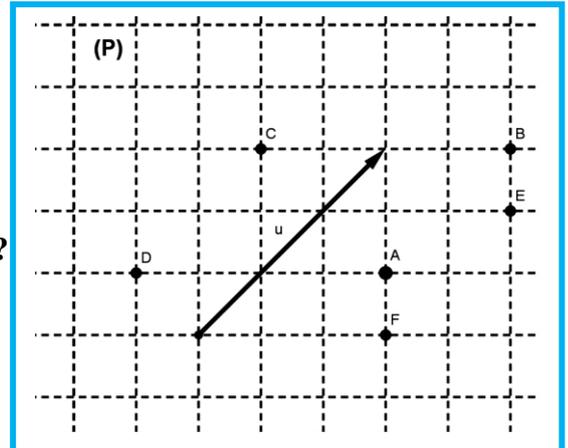
I. Vecteurs du plan (rappel)

a. Activité :

Dans le plan (P) on considère le vecteur \overrightarrow{AB} .

1. Qu'appelle-t-on :

- La droite (AB) pour le vecteur \overrightarrow{AB} ?
 - En partant de A VERS B pour le vecteur \overrightarrow{AB} ?
 - La distance AB pour le vecteur \overrightarrow{AB} ?
2. Que peut-on dire pour les vecteurs \overrightarrow{DC} et \overrightarrow{AB} ?
3. Que peut-on dire pour les vecteurs \overrightarrow{AD} et \overrightarrow{EF} ?



b. Éléments d'un vecteur - égalité de deux vecteurs :

A et B deux points distincts du plan (P). On note le vecteur \overrightarrow{AB} par \vec{u} et \vec{v} et \vec{w} .

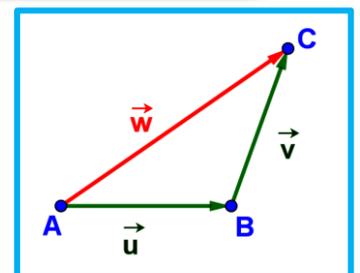
- La direction de \overrightarrow{AB} c'est la droite (AB).
- Le sens de \overrightarrow{AB} celui de la demi droite [AB).
- La longueur ou norme de \overrightarrow{AB} , noté $\|\overrightarrow{AB}\| = AB$; c'est la distance de A à B.
- Cas particulier : $A = B$; Le vecteur nul $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$ n'apas de direction, pas de sens et a pour longueur 0.
- Vecteur unitaire : c'est un vecteur de longueur 1. soit \overrightarrow{AB} un vecteur non nul a seulement deux vecteurs unitaires $\vec{u} = \frac{1}{AB} \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = -\frac{1}{AB} \overrightarrow{AB}$.
- Deux vecteurs non nuls sont égaux si et seulement si : ils ont même direction et même sens et même longueur.
- (ABCD) est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

II. Operations dans l'ensemble des vecteurs du plan (P):

01. L'addition (somme de deux vecteurs de (P))

a. Activité :

Prenons l'activité précédente : déterminer les sommes des vecteurs suivantes : \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AD} ; \overrightarrow{AC} et \overrightarrow{CB} ; \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{EF} .



b. Définition :

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs du plan (P).

La somme des vecteurs $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ est le vecteur $\vec{w} = \overrightarrow{AC}$. On écrit : $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$.

c. Remarques :

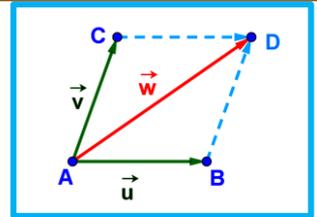
- $\forall A, B, C \in (P) : \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ est appelé relation de Chasles.
- Le vecteur \overrightarrow{BA} est appelé l'opposé du vecteur \overrightarrow{AB} ; on dit que les \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{BA} sont opposés.
- l'opposé du vecteur \vec{u} est le vecteur qui a la même direction de \vec{u} et la même norme (longueur) de \vec{u} et de sens contraire de \vec{u} on le note par $-\vec{u}$.



d. Règle du parallélogramme :

Soient \vec{AB} et \vec{AC} deux vecteurs du plan (P) .

On a $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v} = \vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AD}$ avec le point D vérifie la condition suivant $ABDC$ est un parallélogramme



e. Applications :

- Soit ABCD un rectangle de centre I. construire $\vec{u} = \vec{AB} + \vec{CI} + \vec{BC}$
- ABC est un triangle .

1 Construire le point D tel que : $\vec{AD} = \vec{AB} - \vec{AC}$.

2 Que peut-on dire du quadrilatère ADBC ?

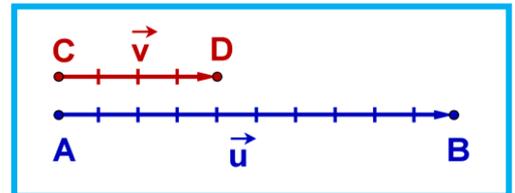
3 Construire le point D tel que : $\vec{BM} = \vec{BC} - \vec{CA}$.

02. La multiplication d'un vecteur \vec{u} par un nombre réel α :

a. Activité :

1 Trouver la relation qui existe entre les vecteurs :
 $\vec{u} = \vec{AB}$ et $\vec{v} = \vec{CD}$.

2 Construire un vecteur \vec{v}' tel que $\vec{v}' = -2\vec{v}$.



b. Définition :

Soit \vec{u} un vecteur non nul et k un nombre non nul .

Le produit d'un vecteur \vec{u} par un réel k (ou un scalaire) est le vecteur \vec{v} qui vérifie :

- \vec{v} a la direction parallèle à la direction du vecteur \vec{u} .
- \vec{v} a pour sens :
 - ❖ Ce lui de \vec{u} si $k > 0$.
 - ❖ Contraire de \vec{u} si $k < 0$.
- \vec{v} de norme (longueur) égale à la norme (longueur) de \vec{u} multiplier par $|k|$ ou encore

$$\|\vec{v}\| = |k| \|\vec{u}\|$$

• Cas particulier :

- ❖ pour tout vecteur \vec{u} on a : $0.\vec{u} = \vec{0}$.
- ❖ pour tout réel k on a : $k.\vec{0} = \vec{0}$.

c. Propriétés :

Pour tous vecteurs \vec{u} et \vec{v} ; pour tous réel k et k' on a :

1 $(k+k').\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$.

2 $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$.

3 $k.(k'\vec{u}) = k'(k\vec{u}) = (kk')\vec{u}$.

4 $1.\vec{u} = \vec{u}$.

5 $k.\vec{u} = \vec{0}$ équivaut $(k = \vec{0}$ et $\vec{u} = \vec{0})$.



d. Application :

- Simplifier : $3\overrightarrow{AB} + 7\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BA}$ puis $-2\left(\frac{3}{5}\right)\overrightarrow{CD} + 7\overrightarrow{DA} - \frac{29}{5}\overrightarrow{DA}$.
- ABC est un triangle.
- 1** Construire les points E, F, G et H tels que :
 $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AF} = -2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AH} = -3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.
- 2** On suppose que : $AB = 8$ cm et le point M vérifie la relation $\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$ (I)
 - démontrer que $4\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$.
 - En déduire \overrightarrow{MA} en fonction de \overrightarrow{AB} puis construire le point M.

03. Vecteurs colinéaires :

a. Définition :

- Deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires s'il existe α de \mathbb{R} tel que : $\vec{u} = \alpha\vec{v}$ ou $\vec{v} = \alpha\vec{u}$.
- Trois points A et B et C du plan (P) sont alignés si et seulement si : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$ sont alignés (ou encore il existe α de \mathbb{R} tel que : $\overrightarrow{AB} = \alpha\overrightarrow{AC}$ ou $\overrightarrow{BC} = \alpha\overrightarrow{BA}$...etc
- Deux droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} sont alignés.

b. Application :

- Soient A et B deux points du plan (P) et M est un point du plan (P) qui vérifie la relation :

(1) : $-4\overrightarrow{MA} + 5\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

1 Montrer que le point M appartient à la droite (AB).

2 Construire le point M.

- ABC est un triangle. D et E sont deux points qui vérifie : $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{ED} = 2\overrightarrow{BC}$.

1 Démontrer que C est le milieu de [AD].

- Soit ABCD un quadrilatère sachant que $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{CD}$.

1 Donner la nature du quadrilatère ABCD.

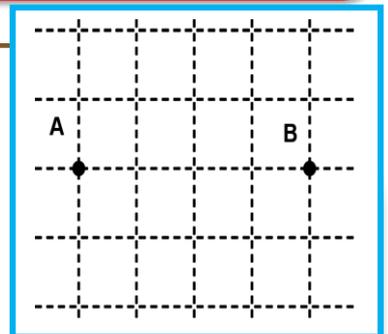
2 On considère le point E tel que $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AC}$ démontrer que : $\overrightarrow{BE} = 2\overrightarrow{BD}$.

- ABC est un triangle. Les points A' et B' et C' sont respectivement les milieux des segments [BC] et [AC] et [AB].

1 Montrer que : $\overrightarrow{BB'} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CC'} = -\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

2 Soient E et F deux points tel que : $\overrightarrow{BE} = 2\overrightarrow{BB'}$ et $\overrightarrow{CF} = 2\overrightarrow{CC'}$.

- a) Construire une figure.
- b) Donner la nature des quadrilatères ACBF et ACBE.
- c) Montrer que les points A et E et F sont alignés.



III. Milieu d'un segment - Propriétés des milieux d'un triangle :

01. Milieu d'un segment :

a. Activité :

Soit un segment $[AB]$.

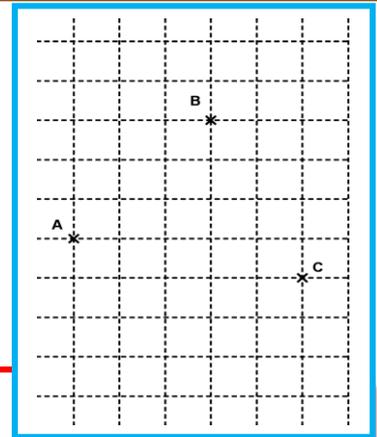
1 Construire le point I de (P) tel que : $\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$.

2 Que représente le point I ? donner la définition pur I .

b. Définition :

$[AB]$ est un segment du plan (P) .

Le point I est le milieu de $[AB]$ si et seulement si : $\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$.



c. Propriétés :

- Le point I est le milieu de $[AB]$ si et seulement si : $\vec{AI} = \vec{IB}$
- Le point I est le milieu de $[AB]$ si et seulement si : $\vec{AB} = 2\vec{AI}$ ou $\vec{BA} = 2\vec{BI}$.
- Le point I est le milieu de $[AB]$ si et seulement si : $\vec{AI} = \frac{1}{2}\vec{AB}$ ou $\vec{BI} = \frac{1}{2}\vec{BA}$.

02. Propriétés des milieux d'un triangle :

a. Activité :

Soit ABC un triangle dans le plan (P) .(voir la figure) .

On considère le point I le milieu du segment $[BC]$.

1 Exprimer le vecteur $\vec{AB} + \vec{AC}$ en fonction de \vec{AI} . .

2 Soient J et K les milieux de $[AB]$ et $[AC]$ déterminer une relation entre \vec{JK} et \vec{BC} .

b. Propriétés :

- ABC est un triangle . I et J sont les milieux des segment $[AB]$ et $[AC]$, on a : $\vec{IJ} = \frac{1}{2}\vec{BC}$.
- ABC est un triangle, K est le milieu du segment $[BC]$, on a : $\vec{AB} + \vec{AC} = 2\vec{AK}$.