## Le contenu

**Remarques**

# I. Equations et inéquations du premier degré à une inconnue :

### 1. Généralité :

**Activité ①:**

**1)** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

- $(E_1): \dfrac{3x+1}{2} = x - \dfrac{x-1}{2}$
- $(E_2): 2x+4 = 3(x-2) - x + 8$
- $(E_3): \sqrt{2}(x-3)+1 = 1-\sqrt{2}(3-x)$
- $(E_4): 4(x-1)^2 - 25 = 0$
- $(E_5): \dfrac{3x-1}{2x+3} = 0$
- $(E_6): |2x+3| = |x-2|$

**2)** Discuter selon les valeurs de $m$ les solutions des équations suivantes :

- $(E_1): mx+5 = x-1$
- $(E_2): 2x+4m = 3(x-m)+8$

**Activité ②**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

- $(E'_1): -4x+7 \leq 2x+14$
- $(E'_2): 2(x-1)-(3x-5) \leq 6x+7+4(x-3)$

### 2. Signe du binôme $ax+b$ $(a \neq 0)$ :

**Activité ③:**

**1)** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

- $3x+4 \leq 0$
- $3x+4 \geq 0$

**2)** Compléter le tableau suivant en utilisant "+" *ou* "−".

| $x$ | $-\infty$ | $-\dfrac{4}{3}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $3x+4$ | ... | $0$ | ... |

Le tableau au-dessus est appelé ***tableau de signe*** du binôme $ax+b$.

**3)** Donner le tableau de signe de $-2x+6$.

**Propriété :**

Le tableau de signe de $ax+b$ est :

| $x$ | $-\infty$ | $-\dfrac{b}{a}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $ax+b$ | *signe contraire de a* | $0$ | *signe de a* |

**Application①: Exercice ③ de la série.**

On pose $p(x) = (2x-5)(-3x+4)$.

**1)** Poser le tableau de signe de $(-3x+4)$ et $(2x-5)$.

**2)** En déduire le signe de $p(x)$.

**3)** En déduire les solutions de l'inéquation $p(x) \leq 0$ .

**Exercice ①: Exercice ④ de la série.**

Résoudre dans $IR$ les inéquations suivantes :

- $(E_1): 4x^2-25\geq 0$
- $(E_2): (4x-5)(2x+7)(1-x)^2>0$
- $(E_3): \dfrac{(3x-1)(x+2)}{2x+5}<0$

## II. Equations et inéquations du second degré à une inconnue :

### 1. Généralité :

**Activité ④:**

**1)** a)-Vérifier que : $x^2-6x+5=(x-3)^2-4$

b)- En déduire les solutions de l'équation : $x^2-6x+5=0$.

L'écriture $(x-3)^2-4$ est appelée ***l'écriture canonique*** du polynôme $x^2-6x+5$.

**2)** Donner l'écriture canonique du polynôme $x^2-x-2$ puis résoudre l'équation $x^2-x-2=0$.

**De façon générale :**

Soit $p(x)=ax^2+bx+c$ un trinôme du second degré tels que $a, b$ et $c$ des réels et $a\neq 0$.

On a :

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right] \\ &= a\left[(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{(2a)^2}\right] \\ &= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{(2a)^2}\right] \end{aligned}$$

Pour simplifier les calculs on pose : $\Delta=b^2-4ac$, on obtient :

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

Le nombre $\Delta$ est appelé **le discriminant** de $ax^2+bx+c$.

**Propriété :**

Pour Résoudre l'équation $(a\neq 0)$ $(E): ax^2+bx+c=0$ on calcule ***le discriminant*** $\Delta=b^2-4ac$. On a les cas suivants:

- Si $\Delta\prec 0$, alors l'équation $(E)$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$ et on écrit: $S=\varnothing$ .
- Si $\Delta=0$, alors l'équation $(E)$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$ qui est $-\dfrac{b}{2a}$ et on écrit: $S=\{-\dfrac{b}{2a}\}$.
- Si $\Delta\succ 0$, alors l'équation $(E)$ admet deux solutions différentes $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ *et* $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $\mathbb{R}$ et on écrit: $S=\{\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a};\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\}$ .

**Application②:**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

- $(E_1): 2x^2+2x-12=0$
- $(E_2): 5x^2-4x+2=0$
- $(E_3): 3x^2-4x=0$
- $(E_4): 3x^2+4=0$
- $(E_5): x^2-2\sqrt{3}x+1=0$

**Exercice ②: Exercice ⑥ de la série.**

**1)** Résoudre dans $IR$ l'équation $(E): 2x^2-2x-4=0$

**2)** En déduire les solutions des équations suivantes :

- $(E'): 2x^4 - 2x^2 - 4 = 0$
- $(E''): 2x^2 - 2|x| - 4 = 0$
- $(E'''): 2x - 2\sqrt{x} - 4 = 0$

## 2. Factorisation d'un trinôme du second degré

### Propriété:

Soit $p(x) = ax^2 + bx + c$ un trinôme du second degré tels que $a, b$ et $c$ des réels et $a \neq 0$ et soit $\Delta$ son discriminant. On a les cas suivants:

- Si $\Delta \prec 0$, alors le polynôme $p(x)$ n'admet pas de factorisation dans $\mathbb{R}$.
- Si $\Delta = 0$, alors : $p(x) = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$.
- Si $\Delta \succ 0$, alors : $p(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ tels que : $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$.

### Application③:

Factoriser, si possible, les polynômes suivants :

- $P_1(x) = 2x^2 + 2x - 12$
- $P_2(x) = 5x^2 - 4x + 2$
- $P_3(x) = 3x^2 - 4x$
- $P_4(x) = 3x^2 + 4$
- $P_5(x) = x^2 - 2\sqrt{3}x + 1$

### Exercice ③: Exercice ⑧ de la série.

**1)** Factoriser les polynômes $x^2 - x - 6$ et $2x^2 + 3x - 2$.

**2)** Résoudre l'equation: $(E_1): \dfrac{2}{x^2 - x - 6} + \dfrac{x}{2x^2 + 3x - 2} = 0$

### Propriété :

Si l'équation $(a \neq 0)$ $(E): ax^2 + bx + c = 0$ admet deux solutions $x_1$ et $x_2$, alors :

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad et \quad x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}.$$

### Application④:

**1)** Sachant que $1$ et une solution de $2018x^2 - x - 2017$, trouver la deuxième solution.

**2)** Résoudre le système suivant: $\begin{cases} x + y = 13 \\ xy = 12 \end{cases}$.

## 3. Signe d'un trinôme du second degré

### Propriété :

Soit $p(x) = ax^2 + bx + c$ un trinôme du second degré tels que $a, b$ et $c$ des réels et $a \neq 0$ et soit $\Delta$ son discriminant. On a les cas suivants:

- Si $\Delta \prec 0$, alors le tableau de signe de $p(x)$ est :

| $x$ | $-\infty$ $\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $p(x)$ | *signe de a* |

- Si $\Delta = 0$, alors alors le tableau de signe de $p(x)$ est :

| $x$ | $-\infty$ | $-\frac{b}{2a}$ | $+\infty$ |
| --- | --- | --- | --- |
| $p(x)$ | signe de $a$ | $0$ | signe de $a$ |

- Si $\Delta \succ 0$, alors le tableau de signe de $p(x)$ est: (On suppose que: $x_1 \prec x_2$ )

| $x$ | $-\infty$ | $x_1$ | | $x_2$ | $+\infty$ |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| $p(x)$ | signe de $a$ | $0$ | signe contraire de $a$ | $0$ | signe de $a$ |

## Application⑤:

**1)** Donner le tableau de signe de polynômes suivants :

- $P_1(x) = 2x^2 + 2x - 12$
- $P_2(x) = 5x^2 - 4x + 2$
- $P_3(x) = 3x^2 - 4x$
- $P_4(x) = 3x^2 + 4$
- $P_5(x) = x^2 - 2\sqrt{3}x + 1$

**2)** En déduire les solutions des inéquations suivantes :

- $P_1(x) \geq 0$
- $P_3(x) \leq 0$
- $P_4(x) \prec 0$
- $\dfrac{P_3(x)}{P_1(x)} \geq 0$

**3)** Ecrire, sans le symbole de la valeur absolue, l'expression $A(x) = |P_1(x)| + |P_3(x)|$.

# III. Equations, inéquations et systèmes du premier degré à deux inconnues:

### 1. Equations du premier degré à deux inconnues :

## Définitions :

- $\mathbb{R}^2$ est l'ensemble des couples $(x, y)$ tels que $x \in \mathbb{R}$ *et* $y \in \mathbb{R}$.
- Toute équation peut être écrite sous la forme : $ax + by + c = 0$ tels que $a, b$ *et* $c$ des réels et $(a,b) \neq (0,0)$ est appelée ***une équation du premier degré à deux inconnues***.
- Le couple $(x_0, y_0)$ est une solution de l'équation: $ax + by + c = 0$ si $ax_0 + by_0 + c = 0$

## Application⑥:

**1)** Parmi les couples $(1;2), (0;3), (3;0)$ *et* $(1;\frac{9}{2})$, déterminer ceux qui vérifient l'équation $3x - 2y + 6 = 0$.

**2)** Déterminer le nombre $a$ pour que le couple $(2a-1, a)$ soit une solution de $2x - y + 3 = 0$.

**3)** Résoudre dans $IR^2$ les équations suivantes :

- $(E_1): 2x - 3y + 3 = 0$
- $(E_2): x - 4y = 8 + 5x$

### 2. Systèmes du premier degré à deux inconnues :

## Activité ⑤:

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant : $(S): \begin{cases} 3x + y = 8 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$.

## Définition et propriété :

On considère le système : $(S): \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ tels que $a, b, c, a', b'$ *et* $c'$ des réels.

- Le nombre $D = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$ est appelé le déterminant du système $(S)$.
- Si $D \neq 0$, alors le système $(S)$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}^2$ : $(x_0, y_0)$ tels que : $x_0 = \dfrac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{D}$ *et* $y_0 = \dfrac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{D}$.
- Si $D \neq 0$, alors le système $(S)$ :
  - Soit admet une infinité de solutions dans $\mathbb{R}^2$ ( $D_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = 0$ *et* $D_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = 0$ ).
  - Ou bien n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}^2$ ( $D_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} \neq 0$ *ou* $D_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} \neq 0$ ).

### ✍ *Application⑦: Exercice* ①⑤ **de la série.**

**1)** Résoudre dans $IR^2$ les systèmes :

- $(S_1) : \begin{cases} 5x - 2y = 1 \\ -10x + 4y = 3 \end{cases}$
- $(S_2) : \begin{cases} 3x + y = 7 \\ 2x - y = 8 \end{cases}$

**2) a)**-Résoudre dans $IR^2$ le système: $\begin{cases} -x + 3y = 4 \\ x - 2y = 11 \end{cases}$

**b)**-En déduire les solutions des systèmes :

- $(S_1) : \begin{cases} -\sqrt{x} + \dfrac{3}{y} = 4 \\ \sqrt{x} - \dfrac{2}{y} = 11 \end{cases}$
- $(S_2) : \begin{cases} -|x+1| + 3y^2 = 4 \\ |x+1| - 2y^2 = 11 \end{cases}$

## 3. Régionnement du plan :

### ✍ *Activité ⑥:*

On considère la droite $(D)$ d'équation : $3x - 2y + 1 = 0$.

**1)** Construire la droite $(D)$ dans un repère orthonormé.

**2)** Parmi les couples $(0;0), (0;-3), (0;1)$, déterminer ceux qui vérifient l'inéquation $3x - 2y + 1 \geq 0$.

**3)** Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ l'inéquation $(E') : 3x - 2y + 1 \geq 0$.

### ✍ *Application⑧:*

**1)** Résoudre dans $IR^2$ les inéquations :

- $(E_1) : x + 2y - 2 \prec 0$
- $(E_2) : 2x + y + 2 \geq 0$

**2)** En déduire les solutions du système : $(S) : \begin{cases} x + 2y - 2 \prec 0 \\ 2x + y + 2 \geq 0 \end{cases}$