Exercice 1.

Déterminer la valeur de vérité de chacune des assertions suivantes :

1. $A_1 : \quad (\exists x \in \mathbb{Q}) : \quad x + 1 < 0$
2. $A_2 : \quad (\forall x \in [0; 8]) : \quad x > \dfrac{1}{x}$
3. $A_3 : \quad (\exists \alpha \in \mathbb{R}) : \quad \alpha^2 < \alpha$
4. $A_4 : \quad (\forall x \in \mathbb{N})\ (\exists x \in \mathbb{N}) : \quad x + y = 7$
5. $A_5 : \quad (\forall x \in]1; +\infty[) :$
$$0 < \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2}}{x - 1} < \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Exercice 2.

Déterminer la négation des propositions suivantes :

1. $A_1 : \quad (\exists x \in \mathbb{R}) \quad [x > 2]$ ou $[x^2 - 2x + 5 < 0]$
2. $A_2 : \quad (\forall a \in]0; 3])\ (\exists b < 0) : \quad a + b = \dfrac{1}{ab}$
3. $A_3 : \quad (\exists x \in \mathbb{R}^-) : \quad x < 3 \Rightarrow x^2 > 9$
4. $A_4 : \quad (\forall x \in [-5; 5]) : \ |x + 1| < 4 \Leftrightarrow x \in [-4; 4]$

Exercice 3.

1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^{*+} \quad , \quad x + \dfrac{1}{x} \geq 2$:
2. Montrer l'implication suivante :
$1 + xy = x + y \Longrightarrow x = 1$ Ou $y = 1$

Exercice 4.

On considère la proposition suivante :
$P : (\forall x \in \mathbb{R}^*) \quad :$
$$\left(\frac{x+1}{x}\right)^2 + 4\left(\frac{x+1}{x}\right) - 5 > 0 \Rightarrow x \leq 0$$

1. Donner la contra-posée de P.
2. Est ce que la proposition P est vraie? Justifier la réponse.
3. Donner la négation de P.

Exercice 5. Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{x^2 + 2}$$

Montrer que :
$(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^{+2}) : \quad [x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)]$

Exercice 6.

1. $\forall n \in \mathbb{N}^* : \quad 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
2. $\forall n \in \mathbb{N}^* : \quad 1^3 + 2^3 + + \ldots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$
3. $\forall n \in \mathbb{N}^* : \quad 2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n(n+1)$
4. $\forall n \in \mathbb{N}^* :$
$$1.2 + 2.3 + \ldots + n.(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$
5. $\forall n \in \mathbb{N}^* : \quad 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$
6. $\forall n \in \mathbb{N}^* : \quad \dfrac{6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n}{30} \in \mathbb{N}$

Exercice 7.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : \quad 4^n - 1$ est divisible par 3.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* : 3^{2n} - 2^n$ est divisible par 7.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* : 4^n + 6n - 1$ est divisible par 9.
4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : 10^n - 1$ est divisible par 9.
5. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : \quad 2^n \geq n$
6. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : \quad \left(\dfrac{3}{2}\right)^n \geq 1 + \dfrac{n}{2}$
7. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* : 1 + 2.3^{n-1} + 5^n$ est divisible par 8.

Exercice 8.

Le but de cet exercice c'est de Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$ et pour tout x de $\mathbb{R}^{*+}$ on a : $(1 + x)^n \geq 1 + nx$

1. Donner l'hypothèse de récurrence.
2. Vérifier que : $\quad (1+nx)(1+x) = 1+(n+1)x+nx^2$
3. Déduire (par récurrence) le résultat souhaité.

Andrew John Wiles est un mathématicien britannique, professeur à l'université d'Oxford, en Angleterre. Il est célèbre pour avoir démontré Le grand théorème de Fermat en 1994. Ce problème avait résisté à la sagacité des mathématiciens pendant 350 ans.