Exercice : 17

1)- Montrer que : $(\forall n \in IN)$ 3 divise $n \Leftrightarrow$ 3 divise n^2 .

2)- Déduire que $\sqrt{3} \notin Q$ .3)- Montrer que $\sqrt{3}+\sqrt{7} \notin Q$.

Exercice : 18

1)- Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x + \sqrt{x+3} \ ; x \geq 1 \\ f(x) = \dfrac{\sqrt{1-x}+6}{2x} \ ; x < 1 \end{cases}$$

2)- On considère la fonction g définie sur IR par :

$$g(x) = |x-1| + 3|2x+1| - |3-x|$$

a)- Ecrire g(x) sans valeur absolue pour tout x de IR .

b)- Résoudre l'équation g(x)=0 .

3)- Soient U et V deux fonctions définies sur IR par :

$$\begin{cases} U(x) = x-1 \ ; x < 2 \\ U(x) = x^2-4 \ ; x \geq 2 \end{cases} \ ; \ \begin{cases} V(x) = x-2 \ ; x < 3 \\ V(x) = 2x+1 \ ; x \geq 3 \end{cases}$$

a)- Calculer $(U+V)(1)$, $(U+V)(\frac{5}{2})$ et $(U+V)(7)$.

b)- Calculer $(U+V)(x)$ pour tout x dans IR .

Exercice 19 :

1)- Soient a , b , c et d des rationnels , soit un nombre non rationnel λ .

a)- Montrer que : $(a+\lambda b = c+\lambda d) \Leftrightarrow (a = c \text{ et } b = d)$

b)- Application :

Ecrire le nombre $\sqrt{12+6\sqrt{3}}$ sous forme $x+y\sqrt{3}$, avec x et y des rationnels .

2)- Soient x , y , a et b des réels strictement positifs .

a)- Montrer que : $2\sqrt{xy} \leq x+y$

b)- Montrer que : $4\sqrt{ab} \leq (1+a)(1+b)$

Exercice : 20

1)- Montrer les deux inégalités :

(1) $(\forall x>0)(\forall y>0)\ \sqrt{xy} \leq \dfrac{x+y}{2}$ (2) $(\forall x>0)(\forall y>0)\ \dfrac{2}{\sqrt{xy}} \leq \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$

2)- Soient x et y deux réels strictement positifs et n un entier naturel tel que $x+y=1$.

Montrer que $(xy)^n \leq \dfrac{1}{4^n}$ et que $2\times 2^n \leq \dfrac{1}{x^n}+\dfrac{1}{y^n}$.

3)- Déduire que :

$(\forall n \in IN)(\forall x>0)(\forall y>0)\ x+y=1 \Rightarrow (1+\dfrac{1}{x^n})(1+\dfrac{1}{y^n}) \geq (1+2^n)^2$