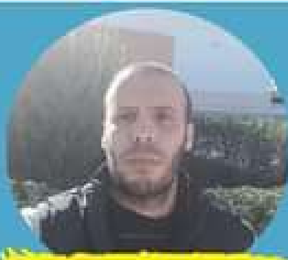
Série d'exercices

1Bac

0634748458



Pr:Ennaji Khalid

Raisonnement par récurrence

1

On pose $S_n = 1+2+3+...+n$ où $n \geqslant 1$.

a) Calculer S_1, S_2, S_3 et S_4

b) Exprimer S_{n+1} en fonction de S_n.

c) Démontrer que pour tout naturel $n \geqslant 1$:

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

2

On pose $S_n = 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$ où $n \geqslant 1$.

a) Calculer S_1, S_2, S_3 et S_4

b) Exprimer S_{n+1} en fonction de S_n.

c) Démontrer que pour tout naturel $n \geqslant 1$:

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

3

On pose $S_n = 1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$ où $n \geqslant 1$.

a) Calculer S_1, S_2, S_3 et S_4

b) Exprimer S_{n+1} en fonction de S_n.

c) Démontrer que pour tout naturel $n \geqslant 1$:

$$S_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

4

Montrez par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}, \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

5

Prouver que

- $\forall n \in \mathbb{N}$ 4^n+5 est un multiple de 3.
- $\forall n \in \mathbb{N}$ $3^{2n}-1$ est un multiple de 8.
- $\forall n \in \mathbb{N}$ $3^{2n+1}+2^{n+2}$ est un multiple de 7.
- $\forall n \in \mathbb{N}$ $3^{2n}-2^n$ est divisible par 7.
- $\forall n \in \mathbb{N}$ 4^n+2 est divisible par 3.
- $\forall n$ $n \geqslant 1$, n^3+2n est un multiple de 3 ?
- $\forall n$ $\geqslant 1$, 4^n+6n-1 est un multiple de 9 ?

6

- Démontrer que pour tout entier $n \geq 2$, $5^n \geq 4^n+3^n$.
- Démontrer que pour tout entier $n \geq 4$, $2^n \geq n^2$.

7

montrer que

- $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $11 / 3^{2n}+2^{6n-5}$
- $(\forall n \in \mathbb{N})$ $17 / 3\times 5^{2n+1}+2^{3n+1}$
- $\sum_{k=0}^{k=n} 3^k = \frac{1}{2}\left(3^{n+1}-1\right)$
- $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $1+\frac{1}{2^2}+.....+\frac{1}{n^2} \leq 2-\frac{1}{n}$

8

On note

$$n! = n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times 2\times 1 \quad \text{où } n \geqslant 1$$

Démontrer que pour tout naturel n non nul : $n! \geqslant 2^{n-1}$

9

on pose $A_n = \underbrace{777.....7}_{n \text{ fois}}$

montrer que $A_n = \frac{7}{9}\left(10^n-1\right)$

10

Démontrer : $a \geqslant 0$,

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(1+a)^n \geqslant 1+na$.

11

Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\cdots+\sqrt{2}}}}} = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$$

(le nombre 2 apparaissant n fois sous la racine).

12

Soit a un élément de $]0,1[$.

2) a) montrer que $a+a^2+......+a^n = a\frac{1-a^n}{1-a}$

b) déduire que $1-a^n \geq n(1-a)a^{n-1}$

3) prends $a = 1-\frac{1}{n^2}$ et montrer que $\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right) \leq 1$