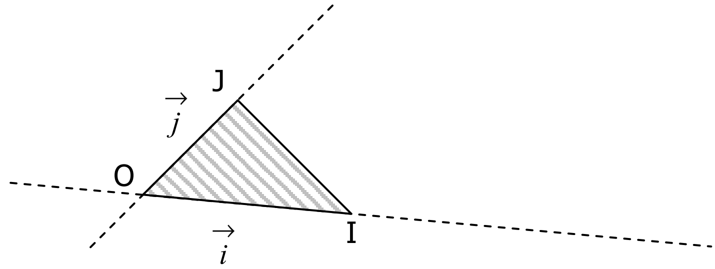
Professeur : Rachid BELEMOU **Lycée** : Oued Eddahab	**COURS** La droite dans le plan	**Niveau :** TCT - BIOF **Année :** 2017-2018

1. REPERE DU PLAN

a. Définition



$(\vec{i};\ \vec{j})$ en posant : $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$.

Soit O, I, J

Remarque :
Si OIJ est un triangle isocèle rectangle en O, alors le **R**epère est **O**rtho**N**ormé (R.O.N.)

b. Repérage d'un point

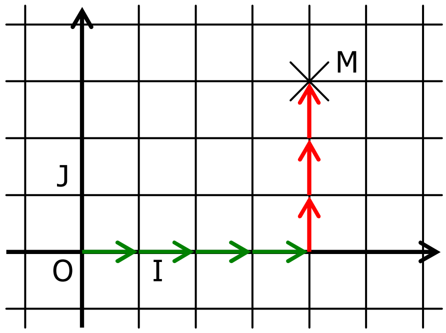
On repère un point M par le « trajet » qui mène à lui à partir de l'origine, en exprimant le vecteur $\overrightarrow{OM}$ en fonction des vecteurs unitaires $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$.

Si $\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{OI} + y\,\overrightarrow{OJ}$, alors x et y sont les coordonnées de M et on note M(x ; y).

Exemple :

Dans le repère (O, I, J) on a M(**4** ; **3**)

4 est l'**abscisse** de M
3 est l'**ordonnée** de M



2. COORDONNEES D'UN VECTEUR DANS UN R.O.N.

a. Définition

Soit (O, I, J) un repère du plan.

Pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un couple (x ; y) tel que $\vec{u} = x\,\overrightarrow{OI} + y\,\overrightarrow{OJ}$ que l'on appelle ses **coordonnées**.
Les notations suivantes sont équivalentes :

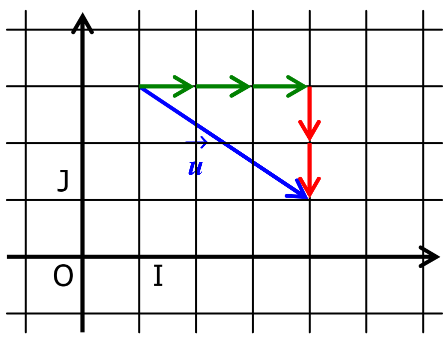
- $\vec{u}\,(x\ ;\ y)$
- $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Exemple :

Dans le repère (O, I, J) on a $\vec{u}$(**3** ; **-2**)

3 est l'**abscisse** de $\vec{u}$

-2 est l'**ordonnée** de $\vec{u}$



b. Égalité vectorielle

Soit deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$

$$\vec{u} = \vec{v} \textit{ si et seulement si } \begin{cases} x = x' \\ \text{et} \\ y = y' \end{cases}$$

c. Opérations sur les vecteurs

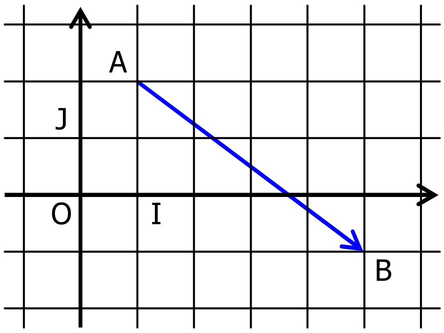
Soit deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$, et λ un nombre réel. Alors on a :

$$\vec{u} + \vec{v}\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix} \qquad \vec{u} - \vec{v}\begin{pmatrix}x-x'\\y-y'\end{pmatrix} \qquad \lambda\,\vec{u}\begin{pmatrix}\lambda x\\\lambda y\end{pmatrix}$$

d. Calcul des coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$

Soit $A(x_A\,;\,y_A)$ et $B(x_B\,;\,y_B)$ deux points distincts.

Alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées : $\begin{pmatrix}x_B - x_A\\y_B - y_A\end{pmatrix}$



Exemple :

Si A(2 ; 1) et B(5 ; -1) Alors $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5-2\\-1-1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$

e. Milieu d'un segment

Soit $A(x_A\,;\,y_A)$ et $B(x_B\,;\,y_B)$ deux points.

Alors le milieu I du segment [AB] a pour coordonnées $\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}\,,\,\dfrac{y_A + y_B}{2}\right)$

3. VECTEURS COLINEAIRES.

Théorème : $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement si $xy' - x'y = 0$

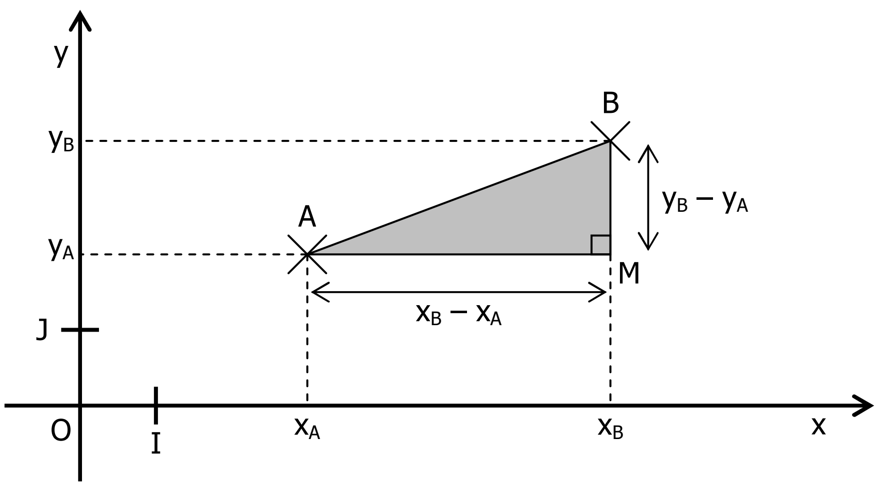
$\vec{u}\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ sont colinéaires.

$xy' - x'y = 3 \times 4 - 2 \times 6 = 12 - 12 = 0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

4. DISTANCE ENTRE DEUX POINTS DANS UN REPERE ORTHONORME.

Soient $A\,(x_A\,;\,y_A)$ et $B\,(x_B\,;\,y_B)$ deux points situés dans un repère **orthonormé** du plan.

En appliquant le théorème de Pythagore au triangle rectangle ABM, on a :



$$AB^2 = AM^2 + BM^2$$

$$\Leftrightarrow \quad AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathbf{AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}$$

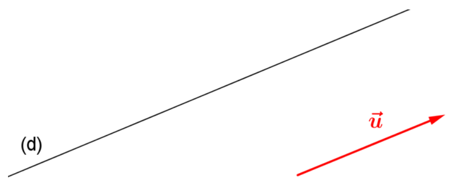
Equations cartésiennes d'une droite

6) Vecteur directeur d'une droite :

a) Définition

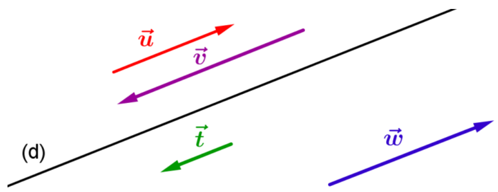
Soit (d) une droite du plan.

Un vecteur directeur d'une droite (d) est un vecteur non nul $\vec{u}$ qui possède la même direction que la droite (d).



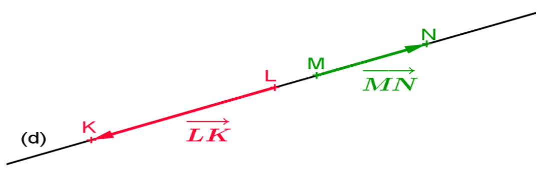
Exemple 1 :

Toute droite possède une infinité de vecteurs directeurs.



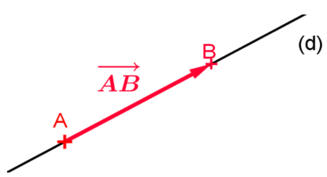
Remarque : Soit $\vec{u}$ un vecteur directeur de la droite (d).Tout vecteur non nul et colinéaire au vecteur $\vec{u}$ est aussi vecteur directeur de cette droite.

Exemple 2 :

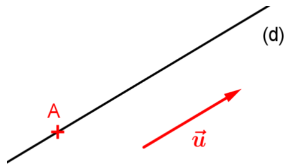


Remarques :

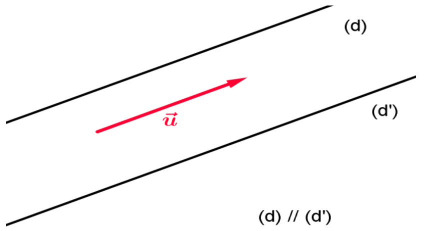
• Deux points distincts quelconques de la droite (d) définissent un vecteur directeur de cette droite.



• La donnée d'un point A et d'un vecteur $\vec{u}$ non nul définissent une unique droite (d).



• Deux droites (d) et (d') sont parallèles si tout vecteur directeur de l'une est aussi vecteur directeur de l'autre.



7) Equations cartésiennes d'une droite

a) Propriété

Toute droite (d) a une équation de la forme $ax + by + c = 0$

avec $(a ; b) \neq (0 ; 0)$. Un vecteur directeur de (d) est $\vec{u}$ ($-b$; a)

Remarque : Une droite (d) admet une infinité d'équations cartésiennes
En effet, si $ax + by + c = 0$ est une équation cartésienne de (d), alors pour tout réel k non nul, $kax + kby + kc = 0$ est une autre équation de la même droite.

b) Propriété réciproque

L'ensemble des points M $(x ; y)$ vérifiant l'équation : $ax + by + c = 0$ avec $(a ; b) \neq (0 ; 0)$ est une droite de vecteur directeur $\vec{u}$($-b$; a)

Démonstration :

c) Exemples

Exemple 1 : Déterminer l'équation cartésienne d'une droite, connaissant un point et un vecteur directeur

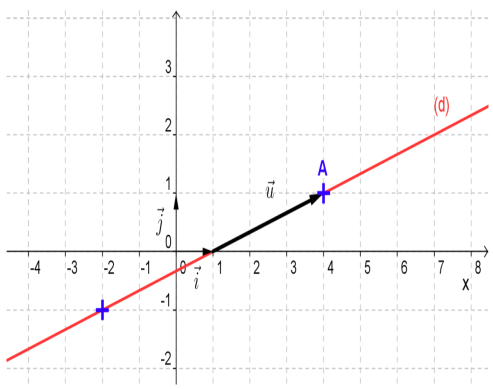
Soit (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$) un repère du plan
Déterminer une équation cartésienne de la droite d passant par le point A(1 ; -1) et de vecteur directeur $\vec{u}$ (-1; 3).

Exemple 2 : Déterminer l'équation cartésienne d'une droite connaissant deux points distincts de la droite

Soit (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$) un repère du plan.
Déterminer une équation cartésienne de la droite d passant par les points A (5 ; 13) et B (10; 23).

Exemple 3 : Déterminer l'équation cartésienne d'une droite à partir de sa représentation graphique

Soit (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$) un repère du plan. Déterminer une équation cartésienne de la droite d, tracée ci-dessous



d) Equation réduite d'une droite

Soit (d) une droite du plan.

• Si (d) n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées, alors il existe un unique couple de réels (m, p) tel que l'équation $y = mx + p$ soit une équation de (d) qui peut aussi s'écrire sous la forme : $mx - y + p = 0$

• Si (d) est parallèle à l'axe des ordonnées, alors il existe un unique réel c tel que l'équation $x = c$ soit une équation de (d).

Remarque : Soit (d) une droite **non parallèle à l'axe des ordonnées.**

Son équation réduite peut donc s'écrire sous la forme: $y = mx + p$ **.**

● Nous avons vu dans les classes précédentes, que le nombre $\boldsymbol{m}$ **est le coefficient directeur de la droite (d).**

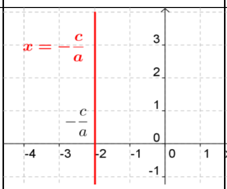
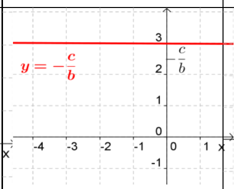
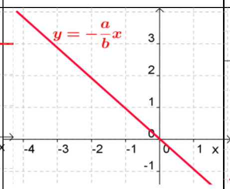
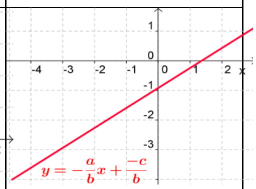
L'équation réduite peut aussi s'écrire sous la forme $\boldsymbol{m}x - y + p = 0$. Un vecteur directeur de cette droite est donc (1 ; $\boldsymbol{m}$)

● Cette droite (d) est la représentation graphique de la fonction affine :
$f(x) = mx + p$.

Exemple:

Soit (d) la droite d'équation cartésienne: $4x + 2y + 3 = 0$
.

8) Récapitulatif : Equations cartésiennes et équations réduites

	Cas où $b = 0$ **et** $a \neq 0$	**Cas où** $a = 0$ **et** $b \neq 0$	**Cas où** $c = 0$ **et** $a \neq 0$ **et** $b \neq 0$	**Cas où** $c \neq 0$ **et** $a \neq 0$ **et** $b \neq 0$
Equation cartésienne	$ax + 0 + c = 0$ $ax + c = 0$	$0 + by + c = 0$ $by + c = 0$	$ax + by + 0 = 0$ $ax + by = 0$	$ax + by + c = 0$
Equation réduite	$x = -\frac{c}{a}$	$y = -\frac{c}{b}$	$y = -\frac{a}{b}x$	$y = -\frac{a}{b}x + -\frac{c}{b}$
Représentation graphique				

9) Positions relatives de deux droites

1) Propriété

Deux droites (d) et (d'), d'équations respectives $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$ sont parallèles si et seulement si : $a\,b' - a'b = 0$

2) Démonstration :

3) Exemples

Exemple 1 : Dans un repère du plan (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$),
la droite d_1 a pour équation : $2x + y - 3 = 0$ et d_2 a pour équation : -4 $x - 2y + 5 = 0$.
Les droites d_1 et d_2 sont-elles parallèles ? Justifier votre réponse.

Exemple 2 : Dans un repère du plan (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$),
la droite d_1 a pour équation : $3x + 2y - 3 = 0$ et d_2 a pour équation : - $x + 2y + 5 = 0$.
Les droites d_1 et d_2 sont-elles parallèles ? Justifier votre réponse.

Remarque:

Soit la droite (d) d'équation : $y = mx + p$ et (d') : $y' = m'x + p'$
(d) et (d') sont parallèles si et seulement si $m = m'$