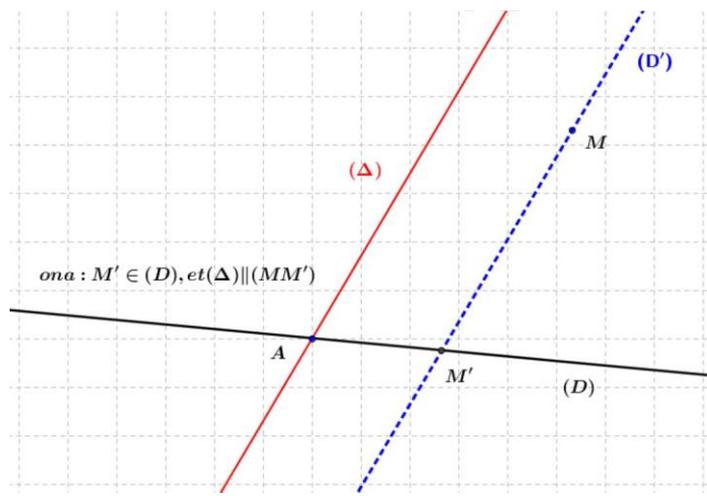


# La projection dans le plan

- I) La projection sur une droite parallèlement à une autre droite  
 II) Théorème de Thales et son théorème réciproque

## I) La projection sur une droite parallèlement à une autre droite



### 1) Définition

Soient (D) et (Δ) deux droites sécantes en un point A, et soit M un point du plan

La droite qui passe par M et parallèle à (Δ) coupe (D) en un point M'

le point M' s'appelle la projection du point M sur (D) parallèlement à (Δ) ou le projeté M sur

(D) parallèlement à (Δ) ou l'Image d'un point M la projection  $P_{(D;\Delta)}$  sur (D) parallèlement à (Δ) et

on écrit :  $P_{(D;\Delta)}(M) = M'$  ou  $P(M) = M'$

la droite (Δ) s'appelle la direction de la projection

$P(M) = M'$  : M' l'Image d'un point M la projection P

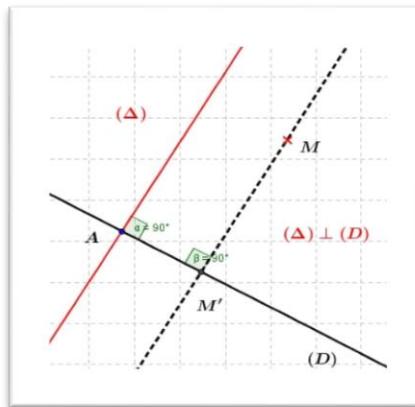
si  $B \in (D)$  alors  $P(B) = B$  on dit alors que le point B est invariant par la projection P

### 2. Propriétés

- Chaque point de (D) est confondu avec sa projection
- Est tout point confondu avec sa projection est un point de (D)
- On dit que la droite (D) est invariante par la projection sur (D) parallèlement à (Δ)

### Cas particulier

Si les droite  $(D)$  et  $(\Delta)$  sont perpendiculaire (on dit aussi orthogonales) on dit que  $M'$  est la projection orthogonale de  $M$  sur  $(D)$



#### Application1 :

Soit  $ABC$  est un triangle et  $M$  le milieu de  $[AB]$

1) Soit  $P_1$  la projection sur  $(BC)$  parallèlement à  $(AC)$

Déterminer :  $P_1(A)$ ,  $P_1(M)$ ,  $P_1(B)$ ,  $P_1(C)$ ,

2) Soit  $P_2$  la projection sur  $(AC)$  parallèlement à  $(BC)$

Déterminer :  $P_2(A)$ ,  $P_2(M)$ ,  $P_2(B)$ ,  $P_2(C)$ ,

**Réponse :** 1) soit:  $P_1$  la projection sur  $(BC)$  parallèlement à  $(AC)$

On a  $A \in (AC)$  et  $(AC) \cap (BC) = \{C\}$  donc  $P_1(A) = C$

On a  $B \in (BC)$  donc  $B$  est invariante par la projection  $P_1$  donc  $P_1(B) = B$

On a  $C \in (BC)$  donc  $C$  est invariante par la projection  $P_1$  donc  $P_1(C) = C$

Soit  $M' = P_1(M)$  on a  $M$  le milieu de  $[AB]$

La parallèle à  $(AC)$  passant par  $M$  passe forcément par le milieu de  $[BC]$   
donc  $M'$  est le milieu de  $[BC]$

1) soit:  $P_2$  la projection sur  $(AC)$  parallèlement à  $(BC)$

On a  $A \in (AC)$  donc  $P_2(A) = A$

On a  $C \in (AC)$  donc  $C$  est invariante par la projection  $P_2$  donc  $P_2(C) = C$

On a  $B \in (BC)$  et  $(AC) \cap (BC) = \{C\}$  donc  $P_2(B) = C$

On a  $M$  le milieu de  $[AB]$  donc la parallèle à  $(BC)$  passant par  $M$  coupe  $[AC]$  en son milieu  
soit:  $M''$  ce milieu donc  $P_2(M) = M''$

### 3. La projection d'un segment et de son milieu sur une droite parallèlement à une autre droite

Soi  $A$  et  $B$  deux points du plan et  $A'$  et  $B'$  sont respectivement leur projection  $P$  sur  $(D)$  parallèlement à  $(\Delta)$

**Propriété 1 :** L'image du segment  $[AB]$  par la projection  $P$  est le segment  $[A'B']$  et on écrit :

$$P([AB]) = [A'B']$$

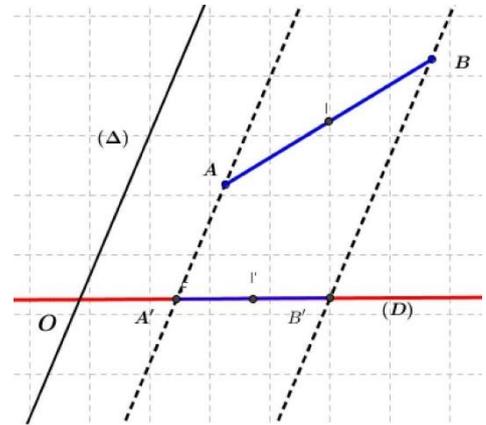
**Propriété 2 :** Si  $I$  est le milieu de  $[AB]$  alors  $P(I) = I'$  est le milieu du segment  $[A'B']$

On dit que la projection conserve les milieux

Remarque :

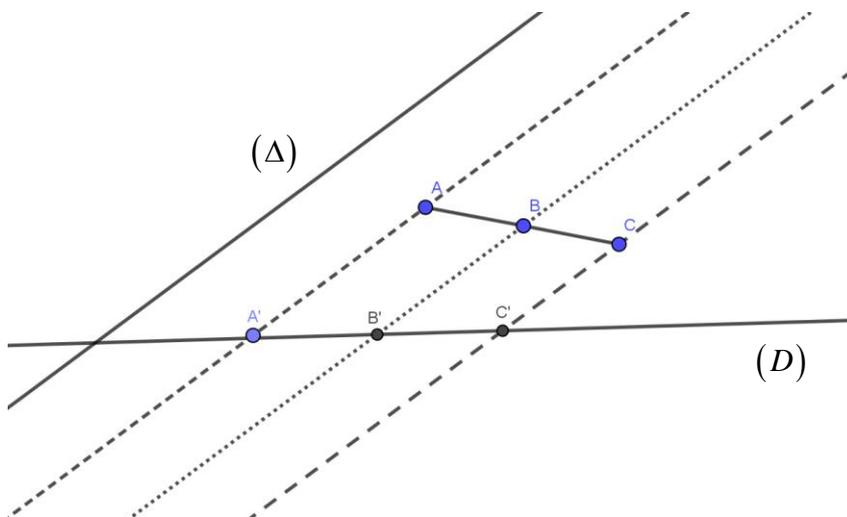
on a :  $P([AB]) = [A'B']$  donc pour tout point M du segment

$[AB] : P(M) = M' \in [A'B']$



## II) Théorème de Thales et son théorème réciproque

### 1) Théorème de Thales :



Soient  $(D)$  et  $(\Delta)$  deux droites sécantes en un point, et soient  $A ; B ; C$  trois points alignés du plan tel que  $(AB)$  et  $(\Delta)$  ne sont pas parallèles

soient  $A' ; B' ; C'$  respectivement les projetés des points  $A ; B ; C$  sur  $(D)$  parallèlement à  $(\Delta)$

$$\text{Alors : } \frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$$

### 2) Théorème de Thales avec les vecteurs :

Soient  $A' ; B' ; C'$  respectivement les projetés des points  $A ; B ; C$  sur droite  $(D)$  parallèlement à  $(\Delta)$

Si  $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$  avec  $k \in \mathbb{R}$  Alors :  $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{A'C'}$

On dit que la projection conserve le coefficient d'alignement de trois points

#### Application 1 :

Soient  $ABC$  est un triangle et  $M$  un point définie par :  $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

1) Construire le point  $M'$  le projeté de  $M$  sur la droite  $(AC)$  parallèlement à  $(BC)$

2) Montrer que  $\overrightarrow{AM'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$  et en déduire que  $\overrightarrow{MM'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

**Réponse :** 1) soit:  $P$  la projection sur  $(AC)$  parallèlement à  $(BC)$

On a  $A \in (AC)$  donc  $A$  est invariante par la projection  $P$  donc  $P(A) = A$

On a  $C \in (BC)$  donc  $C$  est invariante par la projection  $P$  donc  $P(C) = C$

On a aussi :  $P(B) = C$

Et puisque  $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$  et la projection conserve le coefficient d'alignement de trois points

Alors :  $\overrightarrow{AM'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

On a  $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AM'} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}(-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

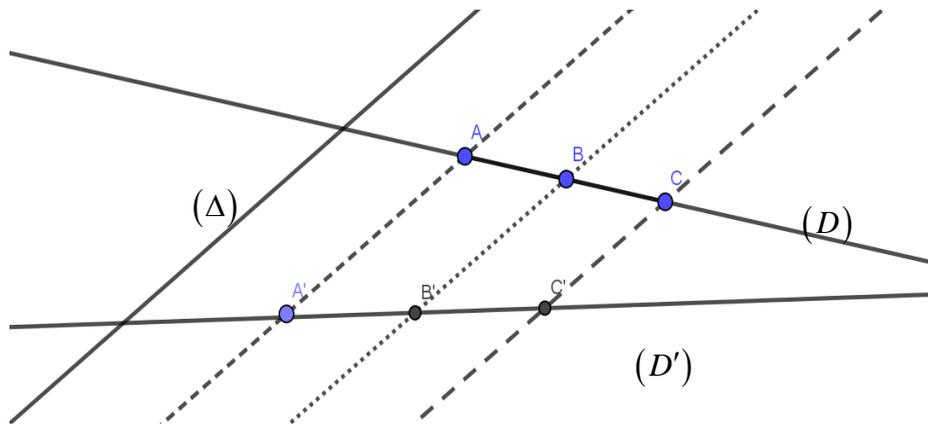
### 3) le théorème réciproque de Thalès

Soient  $(D)$  et  $(D')$  deux droites non parallèles à une troisième  $(\Delta)$ , et soient  $A ; B$  deux points de la droite  $(D)$  tel que  $A'$  et  $B'$  respectivement les projetés des points  $A ; B$  sur  $(D')$  parallèlement à  $(\Delta)$

Si  $C$  un point de la droite  $(D)$  et  $C'$  un point de la droite  $(D')$  tel que  $\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$

Et les points  $A ; B$  et  $C$  sont dans le même ordre sur la droite  $(D)$  que les points  $A' ; B'$  et  $C'$  sur la droite  $(D')$

Alors : le point  $C'$  est la projection de  $C$  sur la droite  $(D')$  parallèlement à  $(\Delta)$  et on a  $(AA') \parallel (BB') \parallel (CC')$



#### Propriété

Soient  $(\Delta)$  et  $(\Delta')$  deux droites sécantes et  $A ; B ; C ; D$  des points distinctes et  $k \in \mathbb{R}$  tel que  $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$  ET si  $A' ; B' ; C'$  et  $D'$  respectivement les projetés des points  $A ; B ; C$  et  $D$  sur la droite  $(\Delta')$  parallèlement à  $(\Delta)$  Alors :  $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{C'D'}$

On dit que la projection conserve le coefficient de colinéarité de deux vecteurs

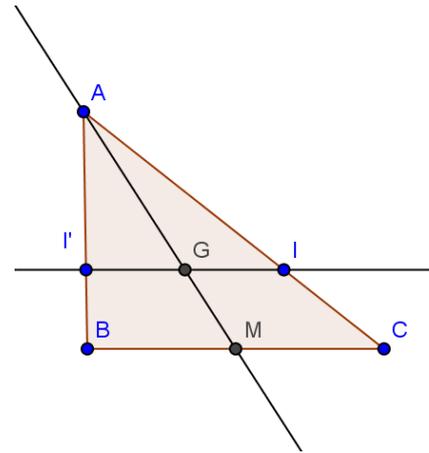
## Application (réciproque de Thales):

Soient  $ABC$  est un triangle et  $I$  et  $I'$  deux points tel que :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AI'} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AB}$$

1) Montrer que  $I'$  est par la projection de  $I$  sur la droite  $(AB)$  parallèlement à  $(BC)$

2) soit  $M$  est le milieu de  $[BC]$  ; la droite  $(AM)$  coupe la droite  $(II')$  en  $G$



Montrer que  $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AM}$

Réponse : 1) On a  $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AC}$  donc  $\|\overrightarrow{AI}\| = \left\| \frac{2}{3} \overrightarrow{AC} \right\|$  donc  $AI = \frac{2}{3} AC$  donc  $\frac{AI}{AC} = \frac{2}{3}$  ①

Et on a :  $\overrightarrow{AI'} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AB}$  donc  $\|\overrightarrow{AI'}\| = \left\| \frac{2}{3} \overrightarrow{AB} \right\|$  donc  $AI' = \frac{2}{3} AB$  donc  $\frac{AI'}{AB} = \frac{2}{3}$  ②

D'après ① et ② on a  $\frac{AI}{AC} = \frac{AI'}{AB}$  et d'après la réciproque de Thales :  $(II') \parallel (BC)$

Et puisque  $(AB)$  coupe  $(II')$  en  $I'$  donc  $I'$  est la projection de  $I$  sur la droite  $(AB)$  parallèlement à  $(BC)$

2) On a  $I'$  est la projection de  $I$  sur la droite  $(AB)$  parallèlement à  $(BC)$  et  $M$  est le milieu de  $[BC]$  Mq :  $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AM}$  ???

On considère  $P$  la projection sur  $(AM)$  parallèlement à  $(BC)$

On a  $A \in (AM)$  donc  $A$  est invariante par la projection  $P$  donc  $P(A) = A$  ①

la parallèle à  $(BC)$  passant par  $C$  est  $(BC)$  elle coupe  $(AM)$  en  $M$  donc  $P(C) = M$  ②

la parallèle à  $(BC)$  passant par  $I$  est  $(II')$  elle coupe  $(AM)$  en  $G$  donc  $P(I) = G$  ③

Et on a en plus  $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AC}$  ④ donc D'après ① et ② et ③ et ④ on a  $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AM}$  car la

projection conserve le coefficient d'alignement de trois points