Barycentre dans le plan

Prof : Mohamed BEN OUAKASS

I. Barycentre de deux points pondérés

1. Point pondéré :

Définition :
Soit A un point du plan et α un nombre réel. Le couple (A, α) s'appelle ***un point pondéré***. On dit aussi que ***le point A est affecté de coefficient α***.

Définition et théorème :
Soit A et B deux points du plan ; α et β deux nombres réels tel que $\alpha + \beta \neq 0$; il existe un point unique **G** qui vérifie : $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$. Le point **G** s'appelle **barycentre des points pondérés (A, α) et (B, β)**.

Remarque 1 :
- Si **α + β = 0** alors il n'existe pas de barycentre des points pondérés (A,α) et (B,β).
- Si le point G est le barycentre des points pondérés (A,α) et (B,β) alors $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$ (cette écriture utiliser pour construire le point G)

Démonstration :
$On\ a\ \ \alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$
équivant à: $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}\right) = \vec{0}$
équivant à: $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{AB} = \vec{0}$
équivant à: $(\alpha + \beta)\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{AB} = \vec{0}$
équivant à: $(\alpha + \beta)\overrightarrow{GA} = -\beta\overrightarrow{AB}$
équivant à: $\overrightarrow{GA} = \frac{-\beta}{(\alpha+\beta)}\overrightarrow{AB}$
équivant à: $-\overrightarrow{AG} = \frac{-\beta}{(\alpha+\beta)}\overrightarrow{AB}$
équivant à: $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{(\alpha+\beta)}\overrightarrow{AB}$

Remarque 2 :
- Si **α = β** tel que $(\alpha \neq 0)$ alors le barycentre de (A, α) et (B, β) s'appelle <u>centre de gravité</u> du segment **[AB]**

Exemple :
Le barycentre de (A,1) et (B,-3) et le point G tel que $\overrightarrow{GA} + (-3)\overrightarrow{GB} = \vec{0}$. Construire G le barycentre de (A,1) et (B,-3).

Réponse :
On a $\overrightarrow{GA} + (-3)\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ alors $\overrightarrow{AG} = \frac{-3}{1+(-3)}\overrightarrow{AB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

2. Propriété d'invariance :

Propriété :
Si G est le barycentre de deux points pondérés (A,α) et (B,β) alors pour tout nombre réel non nul K, le point G est aussi le barycentre de (A,Kα) et (B,Kβ) .

Démonstration :
Si $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}\ et\ k \in IR^*$
Alors $(k\alpha)\overrightarrow{GA} + (k\beta)\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ et On a $k\alpha + k\beta \neq 0$
c-à-d G le barycentre de (A, Kα) et (B, Kβ)

Exemple :
Le barycentre de $\left(A, \frac{1}{3}\right)$ et $\left(B, \frac{2}{3}\right)$ est le barycentre de$(A, 1)$ et $(B, 2)$.

3. Propriété caractéristique du barycentre de deux points pondérés

Propriété :
Soit (A, α) et (B, β) deux points pondérés tel que $\alpha + \beta \neq 0$.
G est le barycentre de (A, α) et (B, β) si et seulement si pour tout point M du plan
$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = (\alpha + \beta)\overrightarrow{MG}$

Démonstration :
Supposons que G est le barycentre de (A,α) et (B,β), et soit M un point du plan.

$$\begin{aligned} \text{On a}\ \ \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} &= \alpha\left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}\right) + \beta\left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}\right) \\ &= \alpha\overrightarrow{MG} + \alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{MG} + \beta\overrightarrow{GB} \\ &= (\alpha + \beta)\overrightarrow{MG} + \alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} \\ \text{danc}\qquad &= (\alpha + \beta)\overrightarrow{MG} \end{aligned}$$

car $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

Remarque :
- Si M=A alors $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{(\alpha+\beta)}\overrightarrow{AB}$
- Si M=B alors $\overrightarrow{BG} = \frac{\alpha}{(\alpha+\beta)}\overrightarrow{BA}$

4. Coordonnées du barycentre de deux points pondérés

Propriété :
Le plan est rapporté à un repère $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Soit $A(x_A, y_A)\ et\ B(x_B, y_B)$ deux points; α et β deux nombres réels tel que $\alpha + \beta \neq 0$.
Et soit $G(x_G, y_G)$ le barycentre de (A,α) et (B,β)

On a : $\begin{cases} x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B}{\alpha+\beta} \\ y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B}{\alpha+\beta} \end{cases}$

Exemple :
Soient $A(1,2)\ et\ B(-4,6)$ et soit G le barycentre de deux points pondérés (A,2) et (B,-1). Calculer les coordonnées de point G.

Réponse :
On a : $\begin{cases} x_G = \frac{2\times1+(-1)\times(-4)}{2+(-1)} = \frac{6}{1} = 6 \\ y_G = \frac{2\times2+(-1)\times6}{2+(-1)} = \frac{-2}{1} = -2 \end{cases}$ alors $G(6, -2)$

II. Barycentre de trois points pondérés

1. Définition et théorème

Propriété :

Soit (A,α) ; (B,β)et (C,γ) tel que$\alpha+\beta+\gamma \neq 0$.
Il existe un point unique G qui vérifie :

$$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}$$

Le point G s'appelle barycentre des points pondérés (A,α) ; (B,β)et (C,γ).

Remarque :

- Si $\alpha=\beta=\gamma$ tel que $(\alpha\neq 0)$ alors le barycentre de (A,α); (B,β) et (C,γ) s'appelle <u>*centre de gravité*</u> de triangle ABC.

2. Propriété d'invariance :

Propriété :

Si G est le barycentre de trois points pondérés (A,α); (B,β) et (C,γ) alors pour tout nombre réel non nul K, le point G est aussi le barycentre de $(A,k\alpha)$; $(B,k\beta)$ et $(C,k\gamma)$.

3. Propriété caractéristique du barycentre de trois points pondérés

Propriété :

Soit (A,α); (B,β) et (C,γ) trois points pondérés tel que $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$.
G est le barycentre de (A,α); (B,β) et (C,γ)si et seulement si pour tout point M du plan :

$$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}.$$

Remarque :

Si on pose M=A dans la propriété caractéristique on obtient : $\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{(\alpha+\beta+\gamma)}\overrightarrow{AB}+\frac{\gamma}{(\alpha+\beta+\gamma)}\overrightarrow{AC}$

(Cette écriture utilisée pour construire le point G)

4. Propriété d'associativité

Propriété :

Si G est le barycentre de (A,α); (B,β) et (C,γ) et $\alpha+\beta\neq 0$ et G' est le barycentre de (A,α) et (B,β) alors G est le barycentre de$(G',\alpha+\beta) et\ (C,\gamma)$.

Démonstration :

G le barycentre de (A,α); (B,β) et (C,γ)

Danc $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ et puisque $\alpha+\beta\neq 0$

et G' est le barycentre de (A,α) et (B,β)

Alors $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{GG'}$

Alors $(\alpha+\beta)\overrightarrow{GG'}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

Danc G est le barycentre de (C,γ) *et* $(G',\alpha+\beta)$

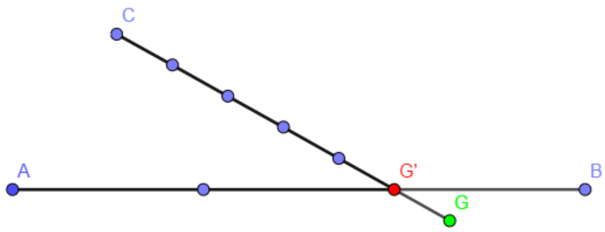
Exemple :

Déterminer le barycentre de $(A,2)$; $(B,4)$ et $(C,-1)$

Réponse :

On construit d'abord G' le barycentre de $(A,2)$ et $(B,4)$ on a $\overrightarrow{AG'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

Puis on construit G qui est le barycentre de $(C,-1)$ et$(G',6)$: $\overrightarrow{CG'}=\frac{6}{5}\overrightarrow{CG'}$



Exemple et application :

Soit ABC un triangle et G un point tel que :

$$2\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{GB}$$

1) Montre que G le barycentre des points pondérés $(A,1)$; $(B,1)$ et $(C,2)$
2) Construire le point G

Réponse :

1) $Ona\ 2\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{GB}$

$danc\ 2\overrightarrow{AC}-3\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}=\vec{0}$

$alors\ 2(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GC})-3\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}=\vec{0}$

$danc\ 2\overrightarrow{AG}+2\overrightarrow{GC}-3\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}=\vec{0}$

$alors\ -\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

$alors\ \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

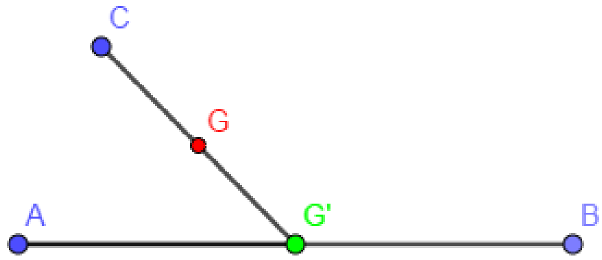
D'où G est le barycentre des points pondérés $(A,1)$; $(B,1)$ et $(C,2)$

2) Soit G' le barycentre de $(A,1)$ et $(B,1)$ alors

$\overrightarrow{AG'}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

Danc G est le barycentre de $(C,2)$ et $(G',2)$ alors

$\overrightarrow{CG}=\frac{2}{4}\overrightarrow{CG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CG}$



5. Coordonnées du barycentre de trois points pondérés

Propriété :

Le plan est rapporté à un repère $(o,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
Soit $A(x_A,y_A)$, $B(x_B,y_B)$ *et* $C(x_C,y_C)$ trois points;
α,β et γ trois nombres réels tel que $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$.
Et soit $G(x_G,y_G)$ le barycentre de (A,α); (B,β) et (C,γ)

On a : $\begin{cases} x_G = \frac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma} \\ y_G = \frac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma} \end{cases}$

III. Barycentre de quatre points pondérés

1. *Définition et théorème*

Propriété :

Soit (A,α) ; (B,β); (C,γ) *et* (D,δ) tel que $\alpha+\beta+\gamma+\delta\neq 0$.

Il existe un point unique G qui vérifie :

$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}+\delta\overrightarrow{GD}=\vec{0}$

Le point G s'appelle barycentre des points pondérés (A,α) ; (B,β); (C,γ) et (D,δ)

Remarque :

➢ Si $\alpha=\beta=\gamma=\delta$ tel que $(\alpha\neq 0)$ alors le barycentre de (A,α) ; (B,β); (C,γ) *et* (D,δ) s'appelle <u>*centre de gravité*</u> des points A, B, C et D.

2. *Propriété d'invariance :*

Propriété :

Si G est le barycentre de quatre points pondérés (A,α) ; (B,β); (C,γ) *et* (D,δ) alors pour tout nombre réel non nul K, le point G est aussi le barycentre de$(A,k\alpha)$; $(B,k\beta)$; $(C,k\gamma)$*et* $(D,k\delta)$.

Exemple :

Le barycentre de $\left(A,\frac{1}{8}\right)$; $\left(B,\frac{1}{4}\right)$; $\left(C,\frac{3}{8}\right)$ et $\left(D,\frac{1}{2}\right)$ est le barycentre de $(A,1)$; $(B,2)$; $(C,3)$et $(D,4)$.

3. *Propriété d'associativité*

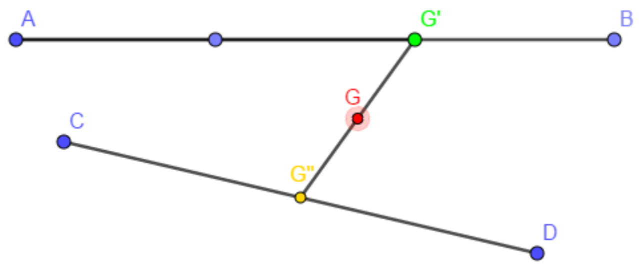
Propriété :

Pour déterminer le barycentre de quatre points pondérés. On peut remplacer deux ou trois points d'être eux par leur barycentre affecté de la somme de leur coefficients.

Exemple :

Construire G le barycentre de $(A,2)$; $(B,4)$; $(C,3)$et $(D,3)$

- On construit d'abord G' le barycentre de $(A,2)$ et $(B,4)$ on a $\overrightarrow{AG'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$
- On construit ensuite G'' le barycentre de $(C,3)$ et $(D,3)$ G'' est le milieu de segment [CD].
- En fin on construit G le barycentre de $(G',6)$ et $(G'',6)$ le milieu de segment [G'G''].



4. *Propriété caractéristique du barycentre de quatre points pondérés*

Propriété :

Soit (A,α) ; (B,β); (C,γ) *et* (D,δ) quatre points pondérés tel que $\alpha+\beta+\gamma+\delta\neq 0$.

G est le barycentre de (A,α) ; (B,β); (C,γ) *et* (D,δ)si et seulement si pour tout point M du plan :

$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}+\delta\overrightarrow{MD}=(\alpha+\beta+\gamma+\delta)\overrightarrow{MG}$.

5. *Coordonnées du barycentre de quatre points pondérés*

Propriété :

Le plan est rapporté à un repère $(o,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Soit $A(x_A,y_A)$, $B(x_B,y_B)$, $C(x_C,y_C)$ *et* $D(x_D,y_D)$ quatre points; α,β,γ et δ quatre nombres réels tel que $\alpha+\beta+\gamma+\delta\neq 0$.

Et soit $G(x_G,y_G)$ le barycentre de (A,α) ; (B,β); (C,γ) *et* (D,δ)

On a : $\begin{cases} x_G = \frac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C+\delta x_D}{\alpha+\beta+\gamma+\delta} \\ y_G = \frac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C+\delta y_D}{\alpha+\beta+\gamma+\delta} \end{cases}$

Exemple :

On considère les points $A(2,1)$, $B(8,5)$, $C(1,-4)$ *et* $D(0,-3)$ le couple de coordonnées des points G, le barycentre de $(A,1)$; $(B,-1)$; $(C,3)$ *et* $(D,-4)$ *est* $G(3,4)$.