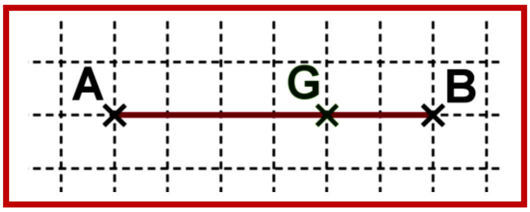
# I. Barycentre de deux points pondérés :

## A. deux points pondérés – le barycentre de deux points pondérés :

### a. activité :

$A$ et $B$ deux points du plan $(\mathcal{P})$ tel que $I$ est le milieu de $[A,B]$, et $G$ est un point du plan $(\mathcal{P})$ .

1. Déterminer $G$ de $(\mathcal{P})$ tel que : $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ .
2. Construire tel que : $\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ .
3. Combien- existe de point $G$ tel que : $2\overrightarrow{GA}-3\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ ?
4. Existe t- il de point $G$ tel que : $3\overrightarrow{GA}-3\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ .




### b. Vocabulaire :

- Dans l'écriture : $a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}=\vec{0}$.
- Le nombre $a$ s'appelle le poids du point $A$, on dit que le point $A$ est affecté de coefficient $a$ .
- Le couple $(A,a)$ est appelé point pondéré .
- L'ensemble $S=\{(A,a),(B,b)\}$ est appelé système pondéré .
- Le cas d'où $a+b\neq 0$ le point $G$ s'appelle barycentre du système pondéré $S$ .
- Si $a=b$ et $a\neq 0$ le point $G$ s'appelle isobarycentre de $A$ et $B$ ou centre de gravité du $[A,B]$ .

### c. Définition et théorème :

Soient $(A,a)$ et $(B,b)$ deux points pondérés du plan $(\mathcal{P})$ , tel que $A\neq B$ et $a$ et $b$ de $\mathbb{R}$ .

- Si $a+b\neq 0$ alors il existe un point unique $G$ de $(\mathcal{P})$ tel que : $a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ .
- le point $G$ s'appelle barycentre du système pondéré $S=\{(A,a),(B,b)\}$ ( ou encore barycentre des points pondérés $(A,a)$ et $(B,b)$ .

### d. Démonstration :

On a :

$$\left(a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}=\vec{0} \text{ et } a+b\neq 0\right)\Leftrightarrow\left(a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{AB}=\vec{0} \text{ et } a+b\neq 0\right)$$

$$\Leftrightarrow\left((a+b)\overrightarrow{AG}=b\overrightarrow{AB} \text{ et } a+b\neq 0\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{AG}=\frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB} \text{ et } a+b\neq 0\right)$$

Puisque $A$ et $B$ deux points donnés du plan $(\mathcal{P})$ donc le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est unique de même pour le nombre $\frac{b}{a+b}$ par suite le point $G$ est unique car $\overrightarrow{AG}=\frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$ .

Conclusion : $G$ est unique tel que : $a+b\neq 0$ et $a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ .

## B. Propriétés du barycentre de deux points pondérés :

### 01. Invariance :

### a. Activité :

le point $G$ est barycentre du système pondéré $S=\{(A,a),(B,b)\}$.

1. Déterminer $G'$ du plan $(\mathcal{P})$ est barycentre du système pondéré $\{(A,ka),(B,kb)\}$ .

**2** est ce qu'il y-a une condition sur le réel $k$ ? donner le théorème .

**b. Théorème :**

- Si $G$ est barycentre du système pondéré $S=\{(A,a),(B,b)\}$ alors pour tout $k$ de $\mathbb{R}^*$ on a aussi $G$ est barycentre du système pondéré $\{(A,ka),(B,kb)\}$.
- barycentre de deux points pondérés ne change pas si on multiplie leurs poids ( ou coefficients ) par le même réel non nul .

## 02. propriété caractéristique :

**a. Activité :**

le point $G$ est barycentre du système pondéré $S=\{(A,a),(B,b)\}$, et $M$ est un point de $(\mathcal{P})$ .

**1** Ecrire $(1)$ : $a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}$ en fonction de $\overrightarrow{MG}$.

**2** Compléter l'équivalence suivant $(1) \Leftrightarrow \forall M\in(\mathcal{P})$ : $a\overrightarrow{\cdots}+b\overrightarrow{\cdots}=(\cdots\cdots)\overrightarrow{MG}$ .

**3** On suppose que $M=A$ et $M=B$ dans la relation $(1)$ que peut-on déduire ?

**b. Propriété caractéristique :**

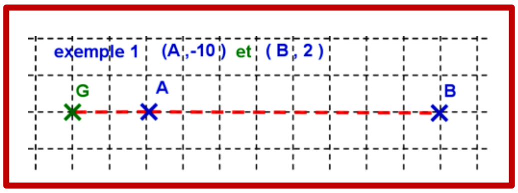
- ( $G$ est barycentre du système pondéré $S=\{(A,a),(B,b)\}$ ) si et seulement si : ( $a+b\neq 0$ et $\forall M\in(\mathcal{P}):a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}=(a+b)\overrightarrow{MG}$ ) .
- Les points $A$ et $B$ et $C$ sont alignés et $\overrightarrow{AG}=\dfrac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$ .

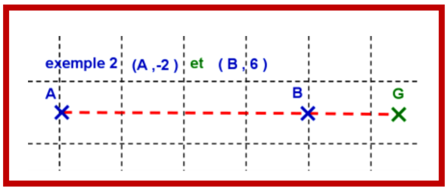
**c. Construction** : de $G$ est barycentre du système pondéré $S=\{(A,a),(B,b)\}$ .

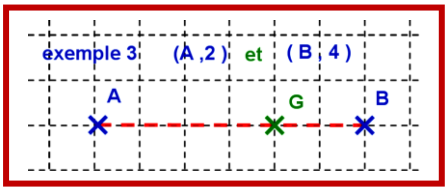
**1** Méthode : on divise le segment $[AB]$ en $|a+b|$ segments égales donc chaque segment a pour longueur $d=\dfrac{AB}{|a+b|}$.

- Si $\dfrac{b}{a+b}$ est positif le point $G$ est situé à une distance $|b|\times d$ ( ou on prend $b$ segment ) du point $A$ dans le sens de $A$ vers $B$ .
- Si $\dfrac{b}{a+b}$ est négatif le point $G$ est situé à une distance $|b|\times d$ ( ou on prend $b$ segment ) du point $A$ dans le sens opposé de $A$ vers $B$ .
- Si $\dfrac{b}{a+b}\in[0,1]$ alors $G\in[AB]$ .
- Si $\dfrac{b}{a+b}>1$ alors $G\in[AB)$ et $G\notin[AB]$ . Si $\dfrac{b}{a+b}<0$ alors $G\in[AB)$ et $G\notin[AB]$ .

Exemple 1 $\{(A,-10),(B,2)\}$ exemple 2 $\{(A,-2),(B,6)\}$ exemple 3 $\{(A,2),(B,4)\}$



## 2 Méthode du parallélogramme :

On choisit un point $M$ tel que $M \notin (AB)$ ( à l'extérieure de la droite $(AB)$ ) .

On construit deux points $A'$ et $B'$ tel que : $\overrightarrow{MA'} = a\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB'} = b\overrightarrow{MB}$ ( 1 ) d'où :

$\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB'}$ (3 ) c.à.d. $[MC]$ est un diamètre du parallélogramme $A'MB'C$

D'après la propriété caractéristique $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} = (a+b)\overrightarrow{MG}$ (2) .

D'après : ( 1 ) et (2) on obtient : $\overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB'} = (a+b)\overrightarrow{MG}$ . (4 ) .

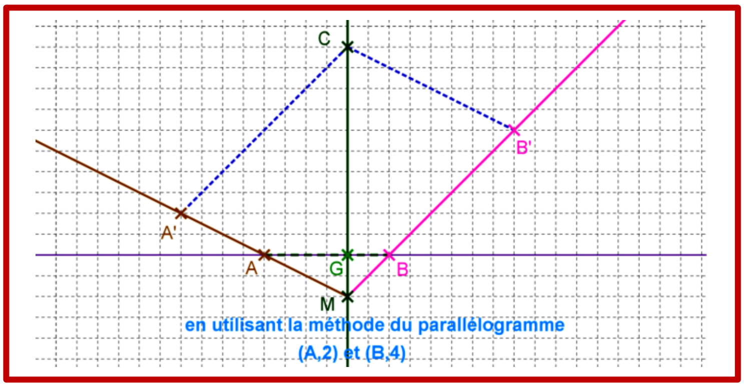
D'après : ( 3) et (4) on obtient : $(a+b)\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MC}$ .

D'où $M$ et $G$ et $C$ sont alignés donc $G \in (MC)$ .

D'où $A$ et $B$ et $G$ sont alignés donc $G \in (AB)$ .

Donc : $G \in (AB) \cap (MC)$ par suite $(MC) \cap (AB) = \{G\}$

exemple : $(A,4)$ et $(B,3)$




## 3 Application :

**a.** Déterminer l'ensemble des points $M$ du plan $(\mathcal{P})$ tel que : $\left\|2\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB}\right\| = 12$ .

**b.** Déterminer l'ensemble des points $M$ du plan $(\mathcal{P})$ tel que : $\left\|2\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB}\right\| = \left\|4\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\right\|$.

Correction :

**a.** On détermine l'ensemble des points :

On considère le point $G$ barycentre de $\{(A,2),(B,4)\}$ d'après la propriété caractéristique on obtient : $\left\|2\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB}\right\| = 6 \Leftrightarrow \left\|6\overrightarrow{MG}\right\| = 12$

$$\Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{MG}\right\| = 2$$

$$\Leftrightarrow MG = 2$$

Conclusion : l'ensemble des points $M$ du plan $(\mathcal{P})$ est le cercle $\mathcal{C}(G,2)$ .

**b.** On détermine l'ensemble des points :

On considère le point $G$ barycentre de $\{(A,2),(B,4)\}$ et le point $G'$ barycentre de $\{(A,4),(B,2)\}$ d'après la propriété caractéristique on obtient :

$$\left\|2\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB}\right\| = \left\|4\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\right\| \Leftrightarrow \left\|6\overrightarrow{MG}\right\| = \left\|6\overrightarrow{MG'}\right\|$$

$$\Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{MG}\right\| = \left\|\overrightarrow{MG'}\right\| \Leftrightarrow MG = MG'$$

Conclusion : l'ensemble des points $M$ du plan $(\mathcal{P})$ est la médiatrice du segment $[GG']$

### 03. Cordonnées du point $G$ barycentre de $S=\{(A,a),(B,b)\}$

**a. Activité :**

Le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté au repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ tel que $A(x_A,y_A)$ et $B(x_B,y_B)$ et $G(x_G,y_G)$ points de $(\mathcal{P})$.

1. Donner les cordonnées des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ .
2. Ecrire le vecteur $\overrightarrow{OG}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ .
3. On déduit les cordonnées de $G$ en fonction des les cordonnées de $A$ et $B$ .

**b. Propriété :**

Le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté au repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ tel que $A(x_A,y_A)$ et $B(x_B,y_B)$ et $G(x_G,y_G)$ points de $(\mathcal{P})$.

Le point $G$ barycentre de $S=\{(A,a),(B,b)\}$ on a : $x_G=\dfrac{ax_A+bx_B}{a+b}$ et $y_G=\dfrac{ay_A+by_B}{a+b}$

## II. Barycentre de trois points pondérés :

### A. Barycentre de trois points pondérés :

**a. Activité :**

On veut connaitre s'il existe un point unique $G$ de $(\mathcal{P})$ du du système pondéré $\{(C,4);(B,-3);(A,1)\}$ c.à.d. $\overrightarrow{GA}-3\overrightarrow{GB}+4\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ .

1. Ecrire le vecteur $\overrightarrow{GA}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ . ; puis on déduit l'unicité de $G$ .
2. Soit le point $K$ barycentre de $\{(B,-3);(A,1)\}$.
   - Montrer que $-2\overrightarrow{GK}+4\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ .
   - Que peut-on déduire pour le point $G$ ? Que peut-on déduire pour les points $G$ et $K$ et $C$ ?

**b. Définition et théorème :**

Soient $(A,a)$ et $(B,b)$ et $(C,c)$ trois points pondérés du plan $(\mathcal{P})$ , tel que $a$ et $b$ et $c$ de $\mathbb{R}$ .

- Si $a+b+c\neq 0$ alors il existe un point unique $G$ de $(\mathcal{P})$ qui vérifie: $a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}+c\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.
- le point $G$ s'appelle barycentre du système pondéré $\{(C,c);(B,b);(A,a)\}$ ( ou encore barycentre des points pondérés $(A,a)$ et $(B,b)$ .
- Si $a=b=c\neq 0$ le point $G$ s'appelle isobarycentre des points A et B et C ou le centre de gravité du triangle $ABC$

### B. Remarque :

$A'$ et $B'$ et $C'$ sont les milieux respectivement de $[BC]$ et $[AC]$ et $[AB]$ .

- On a : $\overrightarrow{AA'}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$ et $G$ centre de gravité du triangle $ABC$ donc :

$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ par suite $\overrightarrow{GA}+\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}\right)+\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}\right)=\vec{0}$ .

- On obtient : et $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$
- D'où : $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$.
- Démonstration analogue on obtient : $\overrightarrow{CG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CA'}$ et $\overrightarrow{BG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BA'}$ .

## C. Propriétés du barycentre de deux points pondérés :

### 01. Invariance :

**a. Théorème :**

- Si $G$ est barycentre du système pondéré $\{(A,a),(B,b),(C,c)\}$ alors pour tout $k$ de $\mathbb{R}^*$ on a aussi $G$ est barycentre du système pondéré $\{(A,ka),(B,kb),(C,kc)\}$.
- barycentre de trois points pondérés ne change pas si on multiplie leurs poids ( ou coefficients ) par le même réel non nul .

### 02. propriété caractéristique :

**a. Propriété caractéristique :**

- $G$ est barycentre du système pondéré $\{(A,a),(B,b),(C,c)\}$ ) si et seulement si :

( $a+b+c\neq 0$ et $\forall M\in(\mathcal{P})$ : $a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}+c\overrightarrow{MC}=(a+b+c)\overrightarrow{MG}$ ) .

### 03. Associativité du barycentre ou barycentre partiel :

**a. Théorème :**

Le barycentre de trois pondérés ne change pas si on remplace deux points du système par leur barycentre avec un poids qui est la somme de leur poids (ou avec un coefficient qui est la somme de leur coefficients)

Ou encore $G_2$ est barycentre de $\{(A,a),(B,b)\}$ ( avec $a+b\neq 0$ ) et on a $G$ est barycentre de $\{(A,a),(B,b),(C,c)\}$ alors $G$ est barycentre de $\{(C,c),(G_2,a+b)\}$

**b. Démonstration :**

- $G$ est barycentre de $\{(A,a),(B,b),(C,c)\}$ $(1)$. $G_2$ est barycentre de $\{(A,a),(B,b)\}$ ( $a+b\neq 0$ ) $(2)$

On démontre que : $G$ est barycentre de $\{(C,c),(G_2,a+b)\}$ .

On a : 
$$\begin{aligned}(a+b)\overrightarrow{GG_2}+c\overrightarrow{GC}&=a\overrightarrow{GG_2}+b\overrightarrow{GG_2}+c\overrightarrow{GC}\\&=a\overrightarrow{GA}+a\overrightarrow{AG_2}+b\overrightarrow{GB}+b\overrightarrow{BG_2}+c\overrightarrow{GC}\\&=a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}+c\overrightarrow{GC}+a\overrightarrow{AG_2}+b\overrightarrow{BG_2}\\&=\underbrace{a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}+c\overrightarrow{GC}}_{\vec{0}}+\underbrace{a\overrightarrow{AG_2}+b\overrightarrow{BG_2}}_{\vec{0}}\quad \text{( d'après } (1) \text{ et } (2)\text{)}\end{aligned}$$

Conclusion : $G$ est barycentre de $\{(C,c),(G_2,a+b)\}$

**c. Exemples :**

- Centre de gravité d'un triangle :

$G$ est barycentre de $\{(C,1);(B,1);(A,1)\}$ ( centre de gravité d'un triangle $ABC$ ) .

$A'$ est le milieu de $[BC]$ donc $A'$ est barycentre de $\{(C,1);(B,1)\}$ . D'où $G$ est barycentre de $\{(A',2);(A,1)\}$ donc : $\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{AA'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$ .

- $G$ est barycentre de $\{(C,3);(B,-2);(A,-2)\}$ .

  On considère $G_2$ est barycentre de $\{(A,-2),(B,-2)\}$ donc $G_2$ est le milieu de $[AB]$.

  D'où : $G$ est barycentre de $\{(C,3),(G_2,-4)\}$ Par suite : $\overrightarrow{CG} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{CG_2} = \frac{-4}{-1}\overrightarrow{AB} = 4\overrightarrow{AB}$

**04.** Cordonnées du point $G$ barycentre de $S=\{(A,a),(B,b),(C,c)\}$

**c.** Propriété :

Le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté au repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ tel que $A(x_A,y_A)$ et $B(x_B,y_B)$ et $C(x_C,y_C)$ et $G(x_G,y_G)$ points de $(\mathcal{P})$.

Le point $G$ barycentre de $S=\{(A,a),(B,b),(C,c)\}$ on a :

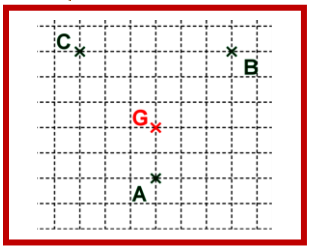
$$x_G = \frac{ax_A + bx_B + cx_C}{a+b+c} \text{ et } y_G = \frac{ay_A + by_B + cy_C}{a+b+c}$$

**05.** Construction : de $G$ est barycentre du système pondéré $S=\{(A,a),(B,b),(C,c)\}$ .

Exemple 1

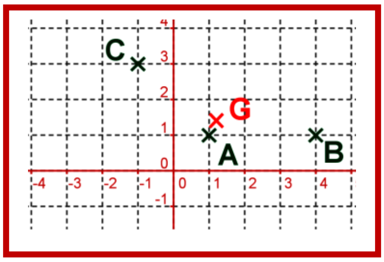
Construire $G$ barycentre de

$S=\{(C,1);(B,1);(A,3)\}$




exemple 2 :

dans le plan $(\mathcal{P})$ rapporté au repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ on considère les points pondérés $(A(1,1);3)$ et $(B(4,1);1)$ et $(C(-1,3);1)$. déterminer les cordonnées de leurs barycentre $G(a,b)$

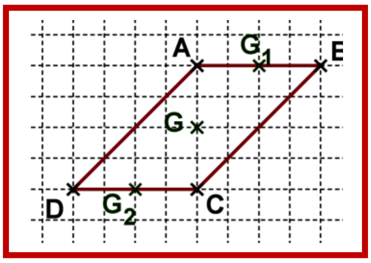



## III. Barycentre de quatre points pondérés :

**A.** Barycentre de quatre points pondérés :

**a.** Activité :

Soit $ABCD$ un parallélogramme de centre $O$. On considère les points pondérés :$(A,1)$ et $(B,1)$ et $(C,1)$ et $(D,1)$ .




- Déterminer : $G_1$ barycentre des points pondérés : $(A,1)$ et $(B,1)$.
- Déterminer : $G_2$ barycentre des points pondérés : $(C,1)$ et $(D,1)$.
- Est-ce que les points pondérés : $(A,1)$ et $(B,1)$ et $(C,1)$ et $(D,1)$ admet un point $G$ du plan $(\mathcal{P})$ tel que $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$.
- Que peut-on déduire ?

**b. Définition et théorème :**

Soient $(A,a)$ et $(B,b)$ et $(C,c)$ et $(D,d)$ quatre points pondérés du plan $(\mathcal{P})$ , tel que a et b et c et d de $\mathbb{R}$ .

- Si $a+b+c+d\neq 0$ alors il existe un point unique $G$ de $(\mathcal{P})$ qui vérifie: $a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}+c\overrightarrow{GC}+d\overrightarrow{GD}=\vec{0}$.
- le point $G$ s'appelle barycentre du système pondéré $\{(A,a),(B,b),(C,c),(D,d)\}$ ( ou encore barycentre des points pondérés $(A,a)$ et $(B,b)$ .
- Si $a=b=c=d\neq 0$ le point $G$ s'appelle isobarycentre des points A et B et C et D ou le centre de gravité du quadrilatère $ABCD$

## B. Propriétés du barycentre de deux points pondérés :

### 01. Invariance :

**a. Théorème :**

- Si $G$ est barycentre du système pondéré $\{(A,a),(B,b),(C,c),(D,d)\}$ alors pour tout $k$ de $\mathbb{R}^*$ on a aussi $G$ est barycentre du système pondéré $\{(A,ka),(B,kb),(C,kc),(D,kd)\}$ .
- barycentre de quatre points pondérés ne change pas si on multiplie leurs poids ( ou coefficients ) par le même réel non nul .

### 02. propriété caractéristique :

**a. Propriété caractéristique :**

- $G$ est barycentre du système pondéré $\{(A,a),(B,b),(C,c),(D,d)\}$ ) si et seulement si : ( $a+b+c+d\neq 0$ et $\forall M\in(\mathcal{P})$ : $a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}+c\overrightarrow{MC}+d\overrightarrow{MD}=(a+b+c+d)\overrightarrow{MG}$ ) .

### 03. Associativité du barycentre ou barycentre partiel :

**a. Théorème :**

Le barycentre de quatre points pondérés ne change pas si on remplace deux points ou bien trois points du système par leur barycentre avec un poids qui est la somme de leur poids (ou avec un coefficient qui est la somme de leur coefficients)

- Ou encore $G_2$ est barycentre de $\{(A,a),(B,b)\}$ ( avec $a+b\neq 0$ ) et on a $G_2$ est barycentre de
- $\{(C,c),(D,d)\}$ ( avec $c+d\neq 0$ ) alors $G$ est barycentre de $\{(G_1,a+b),(G_2,c+d)\}$
- Ou encore $G_3$ est barycentre de $\{(A,a),(B,b),(C,c)\}$ ( avec $a+b+c\neq 0$ ) alors $G$ est barycentre de $\{(G_3,a+b+c),(D,d)\}$

### 04. Cordonnées du point $G$ barycentre de $S=\{(A,a),(B,b),(C,c),(D,d)\}$

**d. Propriété :**

Le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté au repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ tel que $A(x_A,y_A)$ et $B(x_B,y_B)$ et $C(x_C,y_C)$ et $D(x_D,y_D)$ et $G(x_G,y_G)$ points de $(\mathcal{P})$.

Le point $G$ barycentre de $S=\{(A,a),(B,b),(C,c),(D,d)\}$ on a :

$$x_G=\frac{ax_A+bx_B+cx_C+dx_D}{a+b+c+d} \quad \text{et} \quad y_G=\frac{ay_A+by_B+cy_C+dy_D}{a+b+c+d}$$