

Barycentre de 2 ; 3 ; 4 points pondérés

Site MathsTICE de Adama Traoré Lycée Technique Bamako

I – Notion de points pondérés

a) Définition :

On appelle **point pondéré** tout couple $(A ; \alpha)$ formé d'un point A du plan et d'un réel α .

b) Notation : $(A ; \alpha)$ se lit « A affecté du coefficient α » ou $A(\alpha)$.

II – Barycentre de 2 points pondérés

1°) Activité : Soient $(A ; a) ; (B ; b)$ deux points pondérés et M un point du plan P. Discuter suivant les valeurs de $(a+b)$ l'ensemble des points M du plan vérifiant : $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

-0-

$M \in P / a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} = \vec{0}$ (fixons le point A)

$$a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow (a+b)\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow \boxed{(a+b)\overrightarrow{AM} = b\overrightarrow{AB}}.$$

a) 1^{er} cas : Si $(a+b) \neq 0$ alors $\overrightarrow{AM} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$. Donc M est unique dans le plan

b) 2^{ème} cas : Si $(a+b) = 0$ alors $b\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow$ soit $b = 0$ ou $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$. Donc tous les points M du plan sont solutions.

2°) Définition :

Étant donnés deux points pondérés $(A ; a) ; (B ; b)$ avec $a+b \neq 0$. On appelle **barycentre** des points pondérés $(A ; a) ; (B ; b)$ l'unique point G du plan tel que : $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \vec{0}$.

$$\boxed{[G \text{ barycentre de } (A ; a) ; (B ; b)] \Leftrightarrow [a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \vec{0}]}$$

3°) Conséquences

Étant donnés deux points pondérés $(A ; a) ; (B ; b)$ et $k \neq 0$ un réel. Si G est barycentre de

$(A ; a) ; (B ; b)$ alors G est barycentre de $(A ; ka) ; (B ; kb)$.

4°) Remarque

Si $a = 1$ et $b = 1$ alors G barycentre de $(A ; 1) ; (B ; 1)$ est appelé **l'isobarycentre** ou **l'équibarycentre** des points pondérés $(A ; 1) ; (B ; 1)$.

5°) Théorème

Étant donnés deux points pondérés $(A ; a) ; (B ; b)$. Si G est barycentre des points pondérés $(A ; a) ; (B ; b)$ alors les points A ; B ; G sont alignés.

Démonstration

G barycentre des points pondérés (A ; a) ; (B ; b) $\Leftrightarrow a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ (fixons A)
 $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow (a+b)\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow (a+b)\overrightarrow{AG} =$
 $b\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$.
 \overrightarrow{AG} est colinéaire à \overrightarrow{AB} . D'où A ; B ; G sont alignés.

III – Coordonnées du barycentre de 2 points pondérés

1° Définition

Soient $A(x_A; y_A)$; $B(x_B; y_B)$ deux points du plan dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ et $G(x_G; y_G)$ barycentre de A(a) et B(b). on appelle **coordonnées barycentriques** (ou coordonnées du barycentre G) **l'unique couple $(x_G; y_G)$** tels que :

$$x_G = \frac{ax_A + bx_B}{a+b} \quad \text{et} \quad y_G = \frac{ay_A + by_B}{a+b}$$

2° **Exemple** : soit les A(1 ; 2) et B(-3 ; -2). Trouver les coordonnées du barycentre G des points pondérés (A ; -2) et (B ; 4).

$$x_G = \frac{-2-12}{2} = -7 \quad ; \quad y_G = \frac{-4-8}{2} = -6.$$

D'où G(-7 ; -6).

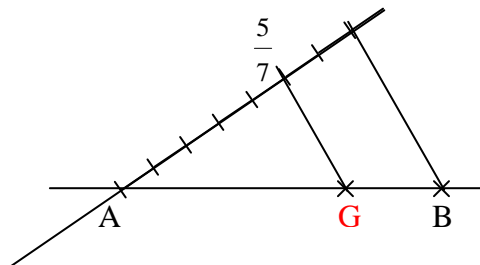
IV – Construction du barycentre de 2 points pondérés

Application : construire le barycentre G des 2 points pondérés A et B dans les cas suivants

- (A ; 2) et (B ; 5)
- (A ; -5) et (B ; 2)
- (A ; 2) et (B ; 4)

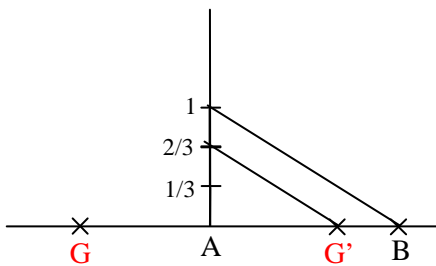
Solution

- G barycentre de (A ; 2) et (B ; 5)



$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{GA} + 5\overrightarrow{GB} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow 2\overrightarrow{GA} + 5\overrightarrow{GA} + 5\overrightarrow{AB} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow 7\overrightarrow{GA} + 5\overrightarrow{AB} &= \vec{0} \Leftrightarrow 7\overrightarrow{AG} = 5\overrightarrow{AB} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} &= \frac{5}{7}\overrightarrow{AB} \end{aligned}$$

b) G barycentre de (A ; -5) et (B ; 2)



$$-5\vec{GA} + 2\vec{GB} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow -5\vec{GA} + 2\vec{GA} + 2\vec{AB} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow -3\vec{GA} + 2\vec{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\vec{AG} = -2\vec{AB}$$

$$\Leftrightarrow \vec{AG} = -\frac{2}{3}\vec{AB}$$

Posons $\vec{AG}' = \frac{2}{3}\vec{AB}$ donc $\vec{AG} = -\vec{AG}'$

V – Barycentre de 3 points pondérés

1°) Propriétés

Le barycentre de plusieurs points pondérés peut se ramener de proche en proche à la recherche du barycentre de deux points pondérés.

Exemple :

Soient (A; α) ; (B; β) ; (C; γ) trois points pondérés tels que : $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ et $\alpha + \beta \neq 0$. Soit G_1 barycentre des points pondérés (A; α) et (B; β) ; on a :

$$\alpha\vec{G_1A} + \beta\vec{G_1B} = \vec{0} \Leftrightarrow (\text{en fixant A}) \alpha\vec{G_1A} + \beta\vec{G_1A} + \beta\vec{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow$$

$$(\alpha + \beta)\vec{G_1A} + \beta\vec{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow \boxed{\vec{AG_1} = \frac{\beta}{\alpha + \beta}\vec{AB} = \vec{0}}. \text{ Soit G barycentre des points}$$

pondérés (G_1 ; $\alpha + \beta$) et (C; γ) ; on a :

$$(\alpha + \beta)\vec{GG_1} + \gamma\vec{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow (\text{en fixant } G_1) (\alpha + \beta)\vec{GG_1} + \gamma\vec{GG_1} + \gamma\vec{G_1C} = \vec{0} \Leftrightarrow$$

$$(\alpha + \beta + \gamma)\vec{GG_1} + \gamma\vec{G_1C} = \vec{0} \Leftrightarrow (\alpha + \beta + \gamma)\vec{G_1G} = \gamma\vec{G_1C} = \vec{0} \Leftrightarrow \boxed{\vec{G_1G} = \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma}\vec{G_1C} = \vec{0}}.$$

2°) Définition

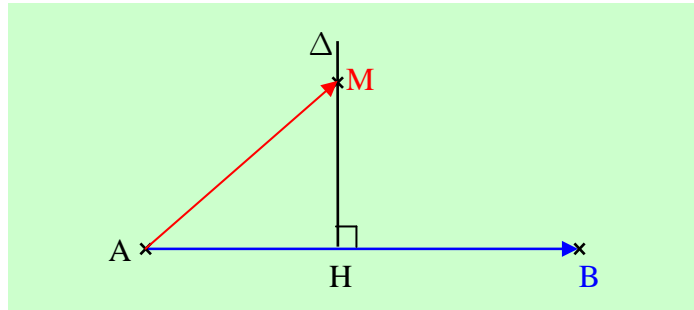
Étant donnés trois points pondérés (A; α) ; (B; β) ; (C; γ) tel que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$.

On appelle **barycentre** des points pondérés (A; α) ; (B; β) ; (C; γ) l'**unique point G** tel que : $\alpha\vec{GA} + \beta\vec{GB} + \gamma\vec{GC} = \vec{0}$.

3°) Exemple : Soit ABC un triangle. Déterminer et construire le barycentre G des points pondérés (A ; 1) ; (B ; 2) ; (C ; -4).

VI – Ligne de niveau de l'application $M \mapsto \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = k \quad (k \in \mathbb{R})$

Déterminons dans le plan P l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = k$.
Soit M un point du plan et H son projeté orthogonal sur (AB) .



On sait que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = \overline{AH} \times \overline{AB}$. Étant donné un réel k , on a $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = k \Leftrightarrow \overline{AH} \times \overline{AB} = k \Leftrightarrow \overline{AH} = \frac{k}{\overline{AB}}$. Ainsi M vérifie $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = k$ si et seulement si son projeté orthogonal sur (AB) est le point H déterminé par $\overline{AH} = \frac{k}{\overline{AB}}$.

L'ensemble des points M cherché est la droite (Δ) perpendiculaire à (AB) au point H tel que :

$$\overline{AH} = \frac{k}{\overline{AB}}$$

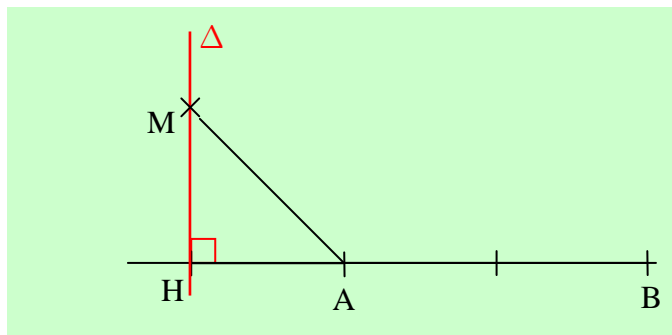
Application : soit deux points A et B tels que $AB = 2$ et l'application

$$f: P \rightarrow P \\ M \mapsto \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM}$$

- Construire les lignes de niveau -1 ; 0 de f .
- Déterminer l'ensemble des points M tels que $f(M) = 2$.

Solution a)

- $K = -1$

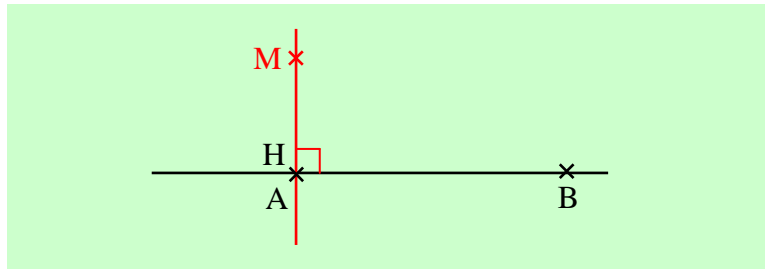


$$K = -1 ; f(M) = -1 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = \overline{AH} \times \overline{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = k \Leftrightarrow \overline{AH} \times \overline{AB} = -1 \Leftrightarrow \overline{AH} = \frac{-1}{2}$$

L'ensemble des points M cherchés est la droite (Δ) perpendiculaire à (AB) passant par le point H tel que : $\overline{AH} = \frac{-1}{2}$

- $K = 0$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AH} = 0 \Leftrightarrow 2\overrightarrow{AH} = 0 ; \text{ les points A et H sont confondus.}$$

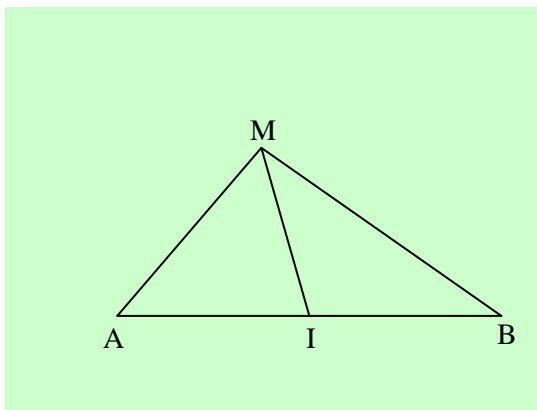


L'ensemble des points M est la droite perpendiculaire à (AB) passant par H.

VII – Ligne de niveau de l'application $M \mapsto \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = k \quad (k \in \mathbb{R})$

Déterminons l'ensemble (E) des points M du plan tel que $\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = k ; (k \in \mathbb{R})$

Soit I le milieu de [AB]. $\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = k \Leftrightarrow (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 = k \Leftrightarrow$



$$\overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IB}^2 = k$$

$$\Leftrightarrow$$

$$2\overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{IB}^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) = k$$

comme $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$

$$2\overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{IB}^2 = k \text{ comme } \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IB}$$

$$2\overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{IA}^2 = k \Leftrightarrow$$

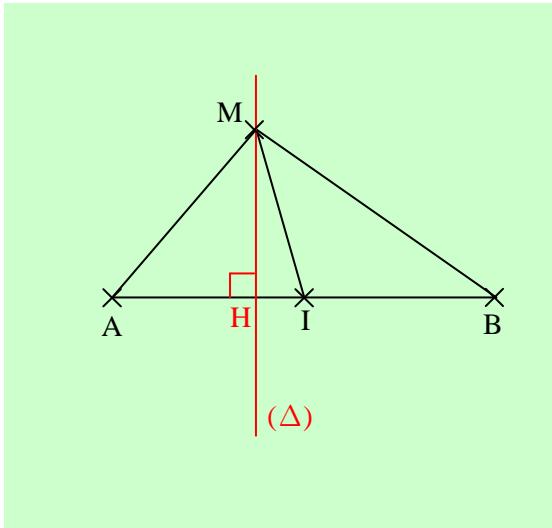
$$2\overrightarrow{MI}^2 + 2\left(\frac{AB}{2}\right)^2 = k \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI}^2 + \frac{AB^2}{2} = k \Leftrightarrow$$

$$2\overrightarrow{MI}^2 = k - \frac{AB^2}{2} \Leftrightarrow \overrightarrow{MI}^2 = \frac{2k - AB^2}{4}$$

- 1^{er} cas : Si $2k - AB^2 < 0$, alors l'ensemble (E) des points M cherchés est le vide, $(E) = \emptyset$.
- 2^{ème} cas : Si $2k - AB^2 = 0$, alors l'ensemble (E) des points M cherchés est $\{I\}$. $(E) = \{I\}$.
- 3^{ème} cas : Si $2k - AB^2 > 0$, alors $MI = \sqrt{\frac{2k - AB^2}{4}}$. L'ensemble (E) des points M cherchés est le cercle de centre I et de rayon $r = \sqrt{\frac{2k - AB^2}{4}}$.

VIII – Ligne de niveau de l'application $M \mapsto \overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 = k \quad (k \in \mathbb{R})$

Déterminons l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 = k$.
Soit I milieu de [AB], M un point du plan et H le projeté orthogonal de M sur (AB).



$$\begin{aligned} \overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 &= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 - (\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA})^2 \Leftrightarrow \\ \overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 &= \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA}^2 - \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IA}^2 \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 &= 4\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 = 4\overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{IA} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 &= 4\overrightarrow{IH} \times \frac{\overrightarrow{AB}}{2} \Leftrightarrow \boxed{\overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 = 2\overrightarrow{IH} \times \overrightarrow{AB}} \\ \overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 = k &\Leftrightarrow 2\overrightarrow{IH} \times \overrightarrow{AB} = k \Leftrightarrow \\ &\boxed{\overrightarrow{IH} = \frac{k}{2\overrightarrow{AB}}} \end{aligned}$$

L'ensemble des points M cherchés est la droite (Δ) perpendiculaire à (AB) au

point H tel que : $\boxed{\overrightarrow{IH} = \frac{k}{2\overrightarrow{AB}}}$