BARYCENTRE DANS LE PLAN

1) BARYCENTRE DE DEUX POINTS PONDERES

A) DEFINITION

PROPRIETE
Soit A et B deux points du plan , a et b deux réels tels que $\mathbf{a + b \neq 0}$.
Il existe un unique point G vérifiant :

$$a\,\overrightarrow{GA} + b\,\overrightarrow{GB} = \vec{0}$$

DEFINITION

Ce point G est appelé **barycentre** du système {(A , a) ; (B , b) } .

On dit aussi que G est le barycentre **des points pondérés** ou **des points massifs** (A , a) et (B , b) .

- *a et b peuvent être négatifs*
- *Dans la pratique on dit :*

« G barycentre de (A , a) , (B , b) »

preuve :
On a :

$$a\,\overrightarrow{GA} + b\,\overrightarrow{GB} = \vec{0} \iff a\,\overrightarrow{GA} + b\,(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0} \quad \text{(d'après la relation de Chasles)}$$
$$\iff (a+b)\,\overrightarrow{GA} + b\,\overrightarrow{AB} = \vec{0}$$
$$\iff (a+b)\,\overrightarrow{GA} = -b\,\overrightarrow{AB}$$
$$\iff (a+b)\,\overrightarrow{AG} = b\,\overrightarrow{AB}$$
$$\iff \overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b}\,\overrightarrow{AB} \quad (\text{ car } a+b \neq 0)$$

Ainsi chercher un point G tel que $a\,\overrightarrow{GA} + b\,\overrightarrow{GB} = \vec{0}$, c'est chercher un point G tel que $\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b}\,\overrightarrow{AB}$.

Or , si $a + b \neq 0$, il existe un unique point G tel que $\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b}\,\overrightarrow{AB}$; on en déduit le résultat .

Si $a + b = 0$, alors il n'y a pas de barycentre .

Rem : Pour la construction du barycentre , on utilise le fait que $\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b}\,\overrightarrow{AB}$.

Ex: Construire les barycentre suivants :

G1 barycentre de (A , 1) , (B , 1)

G2 barycentre de (C , – 3) , (D , – 2)

G3 barycentre de (E , 4) , (F , -2)

B) PROPRIETES (Dans la suite on suppose $a + b \neq 0$)

- **HOMOGENEITE**

Si G est le barycentre de (A , a) , (B , b) , alors, pour tout réel k non nul, G est le barycentre de (A , k a) , (B , k b).

preuve :
Pour $k \neq 0$, on a :

$$a\,\overrightarrow{GA} + b\,\overrightarrow{GB} = \vec{0}$$
$$\iff k(a\,\overrightarrow{GA} + b\,\overrightarrow{GB}) = \vec{0}$$
$$\iff k a\,\overrightarrow{GA} + k b\,\overrightarrow{GB} = \vec{0}$$

$k a + k b \neq 0$; G est donc aussi le barycentre de (A , k a) , (B , k b)

Ex :
- G1 est aussi le barycentre de (A , 3) , (B , 3)
- G2 est aussi le barycentre de (C , 9) , (D , 6)
- G3 est aussi le barycentre de (E , – 4) , (F , 2)

- **POSITION DU BARYCENTRE**

Si G est le barycentre de (A , a) , (B , b) , alors G est situé sur la droite (AB) .

Et réciproquement : tout point de (AB) est barycentre de A et B affectés de coefficients bien déterminés (livre p 241)

Preuve :

$\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$, ainsi $\overrightarrow{AG}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$, donc G est situé sur (AB)

Rem : Si a = b (≠ 0) , G est appelé **isobarycentre** de A et de B .
L'isobarycentre des deux points A et B est aussi le milieu du segment [AB] .

En regardant d'un peu plus près …

	Idée de Preuve
Si le coefficient de A est nul, alors G et B sont confondus. (de même pour B)	On a , a $\overrightarrow{GA}$ + b $\overrightarrow{GB}$ = $\vec{0}$ et a = 0 , donc b $\overrightarrow{GB}$ = $\vec{0}$, c'est à dire $\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ (car b ≠ 0)
Si a et b sont de même signe alors G ∈ [AB] .	On peut supposer a et b positif . Ainsi $0 < \frac{b}{a+b} < 1$ … et $\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$
Si a et b sont de signe contraire alors G appartient à la droite (AB) privé du segment [AB] .	On peut supposer a < 0 et b > 0 . Deux cas se présentent : • a + b < 0 , ainsi $\frac{b}{a+b} < 0$ • a + b > 0 , or a + b < b , ainsi $\frac{b}{a+b} > 1$ On déduit le résultat de $\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$
Si $\lvert a \rvert > \lvert b \rvert$, alors G est « plus près » de A que de B .	On a , a $\overrightarrow{GA}$ + b $\overrightarrow{GB}$ = $\vec{0}$ donc a $\overrightarrow{GA}$ = - b $\overrightarrow{GB}$ Ainsi $\lvert a \rvert$ GA = $\lvert b \rvert$GB , c'est à dire $\frac{GA}{GB} = \left\lvert \frac{b}{a} \right\rvert$ …

- **PROPRIETE FONDAMENTALE**

> Si G est le barycentre de (A , a) , (B , b) , alors pour tout point M du plan : $a\,\overrightarrow{MA} + b\,\overrightarrow{MB} = (a+b)\,\overrightarrow{MG}$

Preuve:
On a , a $\overrightarrow{GA}$ + b $\overrightarrow{GB}$ = $\vec{0}$. Donc pour tout point M du plan , on a :

$a(\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MA}) + b(\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MB}) = \vec{0}$ (Chasles)

⇔ $(a+b)\,\overrightarrow{GM} + a\,\overrightarrow{MA} + b\,\overrightarrow{MB} = \vec{0}$

⇔ $a\,\overrightarrow{MA} + b\,\overrightarrow{MB} = (a+b)\,\overrightarrow{MG}$

Rem:

- Si on considère le milieu I de [AB] , on retrouve une formule vue en seconde :
  Pour tout point M du plan … $\overrightarrow{MI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})$
- Si M et A sont confondus , on retrouve : $\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$; si M et B sont confondus … $\overrightarrow{BG} = \frac{a}{a+b}\overrightarrow{BA}$; …
  Un choix judicieux de M , permet une construction facile de G .

C) COORDONNEES DU BARYCENTRE DE DEUX POINTS

> Le plan est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
> Soit A (x_A ; y_A) et B (x_B ; y_B) deux points du plan.
> Le barycentre G de (A , a) , (B , b) a pour coordonnées :
> $x_G = \frac{1}{a+b}(a\,x_A + b\,x_B)$ et $y_G = \frac{1}{a+b}(a\,y_A + b\,y_B)$

G a pour abscisse la moyenne pondérée des abscisses de A et B et pour ordonnée la moyenne pondérée des ordonnées de A et B .

Preuve :

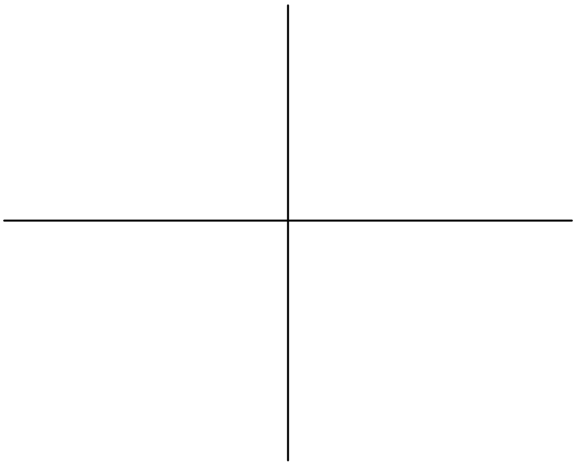
On a vu que pour tout point M du plan $\overrightarrow{MG} = \frac{1}{a+b}(a\,\overrightarrow{MA} + b\,\overrightarrow{MB})$

Pour O en particulier , on a :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{a+b}(a\,\overrightarrow{OA} + b\,\overrightarrow{OB})$$
$$= \frac{1}{a+b}(a(x_A\,\vec{i} + y_A\,\vec{j}) + b\,(x_B\,\vec{i} + y_B\,\vec{j}))$$
$$= \frac{1}{a+b}(a\,x_A + b\,x_B)\,\vec{i} + \frac{1}{a+b}(a\,y_A + b\,y_B)\,\vec{j}$$

Ex:

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ on a , A (-1 ; -3) et B (2 ; 2) .
Placer le point G barycentre de (A , 1) , (B , 3)



2) BARYCENTRE DE 3 POINTS PONDERES ET PLUS …

A) DEFINITION

L'étude faite au paragraphe précédent se généralise à trois points pondérés , quatre points ou plus.
Nous n'énoncerons la définition et les propriétés que dans le cas de trois points pondérés. (pour le cas général reportez-vous p 244 du livre)

PROPRIETE :

Soit A , B et C trois points du plan , a , b et c trois réels tels que $\mathbf{a + b + c \neq 0}$.
Il existe un unique point G vérifiant :

$$a\,\overrightarrow{GA} + b\,\overrightarrow{GB} + c\,\overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

DEFINITION :

Ce point G est appelé **barycentre** de (A , a) , (B , b) , (C , c) .

Il est donné par …

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{a+b+c}\left(b\,\overrightarrow{AB} + c\,\overrightarrow{AC} \right)$$

Comme dans le cas de deux points pondérés :

- **HOMOGENEITE :**
  Le barycentre ne change pas lorsqu'on multiplie les coefficients par un même nombre non nul .
- **ISOBARYCENTRE :**
  Si $a = b = c\ (\neq 0)$, G est encore appelé **isobarycentre** de A , B et C .
  On verra en exercice que si A , B et C ne sont pas alignés alors l'isobarycentre de A , B et C est le centre de gravité du triangle ABC .
- **PROPRIETE FONDAMENTALE :**
  Après quelques calculs, on montre que pour tout point M du plan :
  $$a\,\overrightarrow{MA} + b\,\overrightarrow{MB} + c\,\overrightarrow{MC} = (a+b+c)\,\overrightarrow{MG}$$
  Ce qui nous permet de construire G en choisissant judicieusement M . (M = A , M = B , M = C …)
- **COORDONNEES :**
  Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on déduit facilement de la formule ci-dessus les coordonnées de G .
  En prenant M = O … : $\quad x_G = \dfrac{1}{a+b+c}(a\,x_A + b\,x_B + c\,x_c)$ et $y_G = \dfrac{1}{a+b+c}(a\,y_A + b\,y_B + c\,y_c)$

Rem :

Si l'un des coefficient est nul (par exemple c) , alors G est le barycentre des deux points pondérés (A , a) , (B , b)

B) BARYCENTRE PARTIEL on suppose $a + b + c \neq 0$

Si on remplace deux points pondérés (A , a) et (B , b) (avec $a + b \neq 0$) par leur barycentre H affecté du coefficient a + b , alors le barycentre de (A , a) , (B , b) , (C , c) est aussi le barycentre de (C , c) , (H , a + b) .

Preuve:
Soit H le barycentre de (A , a) , (B , b) .
On a alors $\quad a\,\overrightarrow{HA} + b\,\overrightarrow{HB} = \vec{0}$
Soit G le barycentre de (A , a) , (B , b) , (C , c) .
On a alors

$$\begin{aligned} & a\,\overrightarrow{GA} + b\,\overrightarrow{GB} + c\,\overrightarrow{GC} = \vec{0} \\ \Leftrightarrow\ & a(\overrightarrow{GH} + \overrightarrow{HA}) + b(\overrightarrow{GH} + \overrightarrow{HB}) + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \\ \Leftrightarrow\ & (a+b)\,\overrightarrow{GH} + a\,\overrightarrow{HA} + b\,\overrightarrow{HB} + c\,\overrightarrow{GC} = \vec{0} \\ \Leftrightarrow\ & (a+b)\,\overrightarrow{GH} + c\,\overrightarrow{GC} = \vec{0} \end{aligned}$$

On en déduit que G est le barycentre de (C , c) , (H , a + b) .

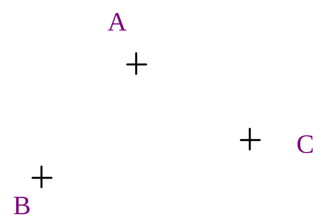
Mais ... quel intérêt ?

Cette propriété permet de ramener la construction du barycentre de trois points (ou plus) , à la construction (connue j'espère) du barycentre de deux points .

Ex:

Choisir les combinaisons les plus simples

Soit A , B et C trois points du plan .
Construire le barycentre G de (A , 2) , (B , 1) , (C , 1) .



Rem : Si les coefficients sont de même signe, alors le barycentre est situé à l'intérieur du triangle ABC .