Barycentre

Objectif : recherche du point d'équilibre ; utilisation des barycentres pour réduire des écritures vectorielles ; recherche du lieu d'un point ; étude de configurations

Rappel :

On donne deux points A et B et on voit tous ce que l'on peut faire avec (droite ; demi-droite ; segment ;.... et vecteurs). Il est souvent nécessaire de redonner la définition du vecteur (sens, direction, norme) dans le plan et dans l'espace. La relation de Chasles doit être revue.

Introduction : « Le porteur d'eau »

Il y a plusieurs façons d'introduire ce cours. Avec des effectifs réduits on peut l'introduire grâce au logiciel Barycentre (disponible sous P.C. ≈ 600 Mo), le but est de chercher pas à pas le barycentre de deux puis trois points affectés de coefficients (positifs, puis négatifs).

Si les effectifs sont plus importants ou si on ne dispose pas de moyens informatiques on peut faire ce petit exercice (Belin) :

Un porteur d'eau met deux volumes d'eau à l'extrémité A de sa perche de 1,5 m de long et un seul volume d'eau à l'autre extrémité B. Il sait que le point d'équilibre G est tel que $m_1\,\overrightarrow{AG} = m_2\,\overrightarrow{BG}$, où m_1 et m_2 désignent les masses d'eau. **a**. Tracer la perche à l'échelle 1:10 et placer G. **b**. Indiquer une égalité vectorielle, dont le second membre est $\vec{0}$, satisfaite par les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{BG}$.

Reprendre les mêmes questions lorsque le porteur d'eau met : un volume d'eau en A et un en B et lorsqu'il y a deux volumes d'eau en a et trois en B.

COURS :

A étant un point et a un nombre réel, le couple (A ; a) est appelé **point pondéré** ; on dit encore que A est affecté du coefficient a.

BARYCENTRE DE DEUX POINTS PONDÉRÉS :

• Soit A et B deux points du plan, ou de l'espace, et a et b deux réels tels que $a + b \neq 0$.

Il existe un unique point G vérifiant $a\,\overrightarrow{GA} + b\,\overrightarrow{GB} = \vec{0}$.
Ce point est le **barycentre** des points pondérés (A ; a) et (B ; b).

• G est le barycentre des points pondérés (A ; a) et (B ; b) si, et seulement si, pour tout point M du plan ou de l'espace on a : $a\,\overrightarrow{MA} + b\,\overrightarrow{MB} = (a + b)\,\overrightarrow{MG}$.

On peut écrire cette relation sous la forme suivante : $\overrightarrow{AG} = \dfrac{b}{a+b}\,\overrightarrow{AB}$

• Le barycentre des points pondérés (A ; a) et (B ; b) appartient à la droite (AB) ; il est situé entre A et B si les coefficients sont de même signe.

• Si $a = b$, alors G est appelé l'**isobarycentre** des points A et B et G est le milieu du segment [AB].

Le barycentre de deux points est inchangé lorsqu'on remplace les deux coefficients par des coefficients proportionnels.

Il est facile de trouver une relation reliant les coordonnées de G en fonction de celles de A et B; comme la relation est valable pour tout point M elle est valable pour le point O (exercice à faire faire par les élèves).

Barycentre de trois ou quatre points pondérés :

• Soit A, B et C trois points du plan, ou de l'espace, et a, b et c trois réels tels que $a + b + c \neq 0$

Il existe un unique point G vérifiant $a\,\overrightarrow{GA} + b\,\overrightarrow{GB} + c\,\overrightarrow{GC} = \vec{0}$; ce point est appelé barycentre des points pondérés (A ; a) ; (B ; b) et (C ; c).

• G est le barycentre des points pondérés (A ; a) ; (B ; b) et (C ; c) si, et seulement si, pour tout point M du plan ou de l'espace on a : $a\,\overrightarrow{MA} + b\,\overrightarrow{MB} + c\,\overrightarrow{MC} = (a + b + c)\,\overrightarrow{MG}$.

On peut écrire cette relation sous la forme suivante : $\overrightarrow{AG} = \dfrac{b}{a+b+c}\,\overrightarrow{AB} + \dfrac{c}{a+b+c}\,\overrightarrow{AC}$

L'isobarycentre de trois points est appelé le **centre de gravité** du triangle.

Il est facile de trouver une relation reliant les coordonnées de G en fonction de celles de A, B et C ; comme la relation est valable pour tout point M elle est valable pour le point O (exercice à faire faire par les élèves).

• Les mêmes relations peuvent être étendues à quatre points.

Intérêt du barycentre :

Le barycentre permet de simplifier les relations vectorielles.

EXERCICES :

Exercice 1. Construire le point G, si il existe, barycentre de (A ; a) et (B ; b) dans les cas suivants :

1. $a = 3$ et $b = 5$
2. $a = 5$ et $b = -4$
3. $a = -1$ et $b = -3$
4. $a = \frac{2}{3}$ et $b = \frac{3}{2}$
5. $a = -2$ et $b = 2$
6. $a = 4$ et $b = 6$

Correction :

1. $3\overrightarrow{GA} + 5\overrightarrow{GB} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{BG} = \frac{3}{8}\overrightarrow{BA}$

2. $\overrightarrow{BG} = 5\overrightarrow{BA}$

5. Le barycentre n'existe pas

Exercice 2.

Construire le point G, si il existe, barycentre de (A ; a), (B ; b) et (C ; c) dans les cas suivants :

1. $a = 3$; $b = 5$ et $c = 4$
2. $a = -2$; $b = 5$ et $c = 3$
3. $a = -1$; $b = -2$ et $c = -4$
4. $a = \frac{1}{2}$; $b = -\frac{1}{2}$ et $c = 2$

Correction :

1. I barycentre partiel de (B ; 5) et (C ; 4) ; puis $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AI}$; on peut également tout faire passer par le point A et on obtient $\overrightarrow{AG} = \frac{5}{12}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

Exercice 3.

On considère un triangle ABC et l'on désigne par G le barycentre de (A ; 1), (B ; 4) et (C ; -3).

a) Construire le barycentre I de (B ; 4) et (C ; -3).

b) Montrer que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GI} = \vec{0}$ et en déduire la position de G sur (AI).

Correction :

a) $\overrightarrow{BI} = 3\overrightarrow{CB}$

b) $\overrightarrow{GA} + 4\overrightarrow{GB} - 3\overrightarrow{GC} = \vec{0}$ or I est le barycentre partiel de (B ; 4) et (C ; -3) donc affecté du coef. 1.

Exercice 4. Soit G le barycentre de (A; 1), (B ; -1), (C ; 2) et (D ; 3).

a) Quelle relation vectorielle peut-on écrire ?

b) Soit J le barycentre de (A ; 1) et (C ; 2) et K le barycentre de (B ; -1) et (D ; 3).

Montrer que $3\overrightarrow{GJ} + 2\overrightarrow{GK} = \vec{0}$. Construire les points J, K et G.

c) Construire le barycentre L de (A ; 1), (B ; -1) et (C ; 2). Montrer que $2\overrightarrow{GL} + 3\overrightarrow{GD} = \vec{0}$

En déduire une nouvelle construction de G.

Correction :

a) $\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} + 3\overrightarrow{GD} = \vec{0}$

b) $\overrightarrow{JA} + 2\overrightarrow{JC} = \vec{0} \Rightarrow 3\overrightarrow{JC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{CJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$

et $-\overrightarrow{KB} + 3\overrightarrow{KD} = \vec{0} \Rightarrow 2\overrightarrow{KB} + 3\overrightarrow{BD} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{BK} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BD}$

On a : $\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GC} = 3\overrightarrow{GJ}$ et $-\overrightarrow{GB} + 3\overrightarrow{GD} = 2\overrightarrow{GK}$; d'où la relation cherchée.

c) idem

Exercice 5.

On se donne un triangle *ABC*. Pour tout point M du plan on pose : $f(M) = 2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$.

a) P désignant un point quelconque du plan, prouver que $f(M) = f(P) =$ constante

b) Construire G_1 le barycentre de (B ; -3) et (C ; 1). Montrer que $f(M) = 2\overrightarrow{G_1A}$.

c) Construire G_2 le barycentre de (A ; 2) et (C ; 1). Montrer que $f(M) = 3\overrightarrow{BG_2}$

d) On désigne par G_3 le barycentre de (B ; -3) et (A ; 2). Montrer que les droites (AG_1), (BG_2) et (CG_3) sont parallèles. En déduire une construction de G_1, G_2 et G_3.

Correction :

a) $f(M) = 2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MA} - 3\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}\right) + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$.

b) $-3\overrightarrow{G_1B} + \overrightarrow{G_1C} = \vec{0}$ et $-3\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = -2\overrightarrow{MG_1} \Leftrightarrow f(M) = 2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MG_1} = 2\overrightarrow{G_1A}$.

c) $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG_2} \Leftrightarrow f(M) = 3\overrightarrow{MG_2} - 3\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{BG_2}$.

d) $-3\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{MG_3} \Leftrightarrow f(M) = \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MG_3} = \overrightarrow{G_3C}$

On a donc : $f(M) = 2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{G_1A} = 3\overrightarrow{BG_2} = \overrightarrow{G_3C}$;
les vecteurs sont colinéaires et les droites sont parallèles.

<u>Exercice 6</u>.

ABC est un triangle rectangle isocèle de sommet A, de côté *a*, c'est à dire que *a* désigne la longueur *AB*. Pour chaque question déterminer et tracer le lieu des points vérifiant le relation donnée :

a) $\overrightarrow{AM}+2\overrightarrow{BM}+2\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{0}$

b) $\left\|2\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}\right\| = 2a$

c) $\left\|2\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}\right\| = \left\|2\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{CM}\right\|$

d) $2\,AM^2 + BM^2 + CM^2 = a^2$

e) $\left\|2\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}\right\| = \left\|\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{CM}\right\|$

<u>Correction</u> :

a) $\overrightarrow{AM}+2\overrightarrow{BM}+2\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{0}$ on a immédiatement M barycentre du système de points (A ; 1), (B ; 2), (C ; 2). On construit en premier le milieu H de [BC] ; puis on a $\overrightarrow{HM} = \frac{1}{6}\overrightarrow{HA}$.

b) I barycentre du système de points (A ; 2), (B ; 1) et (C ; 1) {I milieu de [AH]}

donc $\left\|4\overrightarrow{IM}\right\| = 2a \Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{IM}\right\| = \frac{1}{2}a$ on en déduit que M $\in$ au cercle de centre I et de rayon ½ *a*.

c) $\left\|2\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}\right\| = \left\|2\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{CM}\right\| \Leftrightarrow \left\|4\overrightarrow{IM}\right\| = \left\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right\| \Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{IM}\right\| = \frac{1}{4}\left\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right\| = \frac{1}{4}a\sqrt{2}$

d) $2\,AM^2 + BM^2 + CM^2 = a^2 \Leftrightarrow 2\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IM}\right)^2 + \left(\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IM}\right)^2 + \left(\overrightarrow{CI}+\overrightarrow{IM}\right)^2 = a^2$

on développe et on regroupe d'où $2\overrightarrow{IM}.\left(2\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{CI}\right) + 4IM^2 = a^2 - 2AI^2 - BI^2 - CI^2$

or $2\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{0}$ et $AI^2 = \frac{2a^2}{16}$; $BI^2 = CI^2 = \frac{10a^2}{16}$

d'où $4\,IM^2 = -\frac{8a^2}{16}$ ce qui est impossible donc le point M n'existe pas

e) $\left\|2\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}\right\| = \left\|\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{CM}\right\| \Leftrightarrow \left\|4\overrightarrow{G_1M}\right\| = \left\|-\overrightarrow{G_2M}\right\|$

G_1 barycentre du système de points (A ; 2), (B ; 1), (C ; 1)
G_2 barycentre du système de points (A ; 1), (B ; -1), (C ; -1)
M est sur la droite perpendiculaire à $[G_1G_2]$ passant par le point situé à ¼ en partant de G_1.

Exercice 7.

ABCD est un carré de côté *a*. Pour chaque question déterminer le lieu des points vérifiant la relation donnée :

a) $\left\|\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{DM}\right\| = \overrightarrow{AB}$

b) $\left\|\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{DM}\right\| = \left\|3\overrightarrow{AM}+3\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{CM}-\overrightarrow{DM}\right\|$

c) $\left\|\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{DM}\right\| = \left\|\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}-\overrightarrow{DM}\right\|$

d) $AM^2 + BM^2 + CM^2 + DM^2 = 4\,a^2$

e) $AM^2 + BM^2 + CM^2 + DM^2 = a^2$

Correction :

a) On a immédiatement M barycentre du système de points (A ; 1), (B ; 1), (C ; 1) et (D ; 1). On construit en premier les milieux de [AB] et de [CD] ; puis on a $\left\|4\overrightarrow{GM}\right\| = \overrightarrow{AB}$.

b) I barycentre du système de points (A ; 3), (B ; 3), (C ; -1) et (D ; -1).

G_1 milieu de [AB] et G_2 de [DC]

$$3\overrightarrow{AM}+3\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{CM}-\overrightarrow{DM} = 6\overrightarrow{G_1I} - 2\overrightarrow{G_2I} = \overrightarrow{0}$$

Donc $3\overrightarrow{G_1I} - \overrightarrow{G_2I} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{G_1I} = \overrightarrow{G_2G_1}$

D'où $\left\|\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{DM}\right\| = \left\|3\overrightarrow{AM}+3\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{CM}-\overrightarrow{DM}\right\| \Leftrightarrow \left\|4\overrightarrow{GM}\right\| = \left\|4\,\overrightarrow{IM}\right\| \Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{GM}\right\| = \left\|\overrightarrow{IM}\right\|$

M est sur la médiatrice de [IG] donc M $\in$ (AB).

c) Pas de barycentre $\left\|\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{DM}\right\| = \left\|\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}-\overrightarrow{DM}\right\|$

$\Leftrightarrow \left\|4\overrightarrow{GM}\right\| = \left\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}\right\| = \frac{1}{4}\left\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}\right\|$ or $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{0}$ donc G = M

d) $AM^2 + BM^2 + CM^2 + DM^2 = 4\,a^2 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GM}\right)^2 + \left(\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GM}\right)^2 + \text{.........} = 4a^2$

on développe, on regroupe et on obtient

$$2\overrightarrow{GM}.\left(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{DG}\right) + 4GM^2 = 4a^2 - AG^2 - BG^2 - CG^2 - DG^2$$

or $\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{0}$ et $AI^2 = BI^2 = CI^2 = DG^2 = \frac{a^2}{2}$

donc $4.GM^2 = 4a^2 - 4\frac{a^2}{2} \Leftrightarrow GM^2 = \frac{a^2}{2} \Leftrightarrow$ M $\in$ au cercle de centre G et de rayon $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

e) ……. $GM^2 = a^2 - 2a^2 = -\,a^2$ impossible

Barycentre

Définition

Étant donné un système de n points pondérés $\{(A_i\,;\,a_i)\}_{1 \le i \le n}$, si la somme des coefficients a_i est non nulle, il existe un unique point G vérifiant :

$a_1\,\overrightarrow{GA_1} + a_2\,\overrightarrow{GA_2} + a_3\,\overrightarrow{GA_3} + \cdots + a_n\,\overrightarrow{GA_n} = \vec{0}$, c'est-à-dire $\sum\limits^{i=n} a_i\,\overrightarrow{MA_i} = \vec{0}$

Ce point G est appelé barycentre du système $\{(A_i\,;\,a_i)\}_{1 \le i \le n}$.

Propriété

Le barycentre ne change pas si on modifie l'ordre des points pondérés.
Le barycentre ne change pas si on multiplie tous les coefficients par $k \in \mathbb{R}^*$.

Définition

On appelle isobarycentre des points A_1, A_2, $\cdots$, A_n, le barycentre de ces points tous affectés d'un même coefficient non nul.

Cas particulier :
L'isobarycentre de deux points A et B est le milieu du segment [AB].
L'isobarycentre de trois points A, B, C est le centre de gravité du triangle ABC (point d'intersection des médianes).

Propriété

Lorsque $\sum\limits_{i=1}^{i=n} a_i \neq 0$, les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

1°) G est barycentre du système $\{(A_i\,;\,a_i)\}_{1 \le i \le n}$, c'est-à-dire $\sum\limits_{i=1}^{i=n} a_i\,\overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$.

2°) Pour tout point M on a : $\sum\limits_{i=1}^{i=n} a_i\,\overrightarrow{MA_i} = \left(\sum\limits_{i=1}^{i=n} a_i\right)\overrightarrow{MG}$.

3°) Il existe un point O tel que : $\sum\limits_{i=1}^{i=n} a_i\,\overrightarrow{OA_i} = \left(\sum\limits_{i=1}^{i=n} a_i\right)\overrightarrow{OG}$.

Propriété

Si chaque point A_i a pour coordonnées x_i , y_i et éventuellement z_i ,
les coordonnées de G barycentre de $\{(A_i\,;\,a_i)\}_{1 \le i \le n}$ sont données par :

$x_G = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{i=n} a_i\,x_i}{\sum\limits^{i=n} a_i}$; $y_G = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{i=n} a_i\,y_i}{\sum\limits^{i=n} a_i}$ et éventuellement $z_G = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{i=n} a_i\,z_i}{\sum\limits^{i=n} a_i}$

Si chaque point A_i a pour affixe z_i l'affixe de G est donnée par $z_G = \dfrac{\sum^{i} a_i\, z_i}{\sum^{i=n} a_i}$

Propriété

Soient A et B deux points distincts.
L'ensemble des barycentres de (A ; a) ; (B ; b) avec $a \in$ IR , $b \in$ IR et a + b # 0 est la droite (AB).
L'ensemble des barycentres de (A ; a) ; (B ; b) avec a ³ 0 , b ³ 0 et a + b # 0 est le segment [AB].

Propriété

On considère un système $\{(A_i\ ;\ a_i)\}_{1 £ i £ n}$ avec n ³ 3 et $\sum_{i=1}^{i=n} a_i$ # 0

On suppose qu'il existe un entier p tel que $1 < p < n$ et $\sum_{i=1}^{i=p} a_i$ # 0

Si G est barycentre de $\{(A_i\ ;\ a_i)\}_{1 £ i £ n}$ et G_0 barycentre de $\{(A_i\ ;\ a_i)\}_{1 £ i £ p}$

alors G est barycentre de $\left(G_0\ ;\ \sum^{i=p} a_i\right)\ ;\ (A_{p+1}\ ;\ a_{p+1})\ ;\ \cdots\ ;\ (A_n\ ;\ a_n)$.

(On peut remplacer les p premiers points par leur barycentre partiel affecté de la somme de leurs coefficients.)