Dans ce qui suit, on considère que le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$

I. Expression analytique du produit scalaire et ses conséquences

1. Expression analytique du produit scalaire

Propriété

Si $\vec{u}\ et\ \vec{v}$ sont deux vecteurs du plan tels que $\vec{u}=x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}\ et\ \vec{v}=x'\vec{\imath}+y'\vec{\jmath}$ où $x,y,x'\ et\ y'$ sont des nombres réels alors : $\boldsymbol{\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'}$

Exemple

Soit les vecteurs $\vec{u}(2;-3)\ \vec{v}(-1;4)\ et\ \vec{w}(3;2)$

On a :

$\vec{u}.\vec{v}=\left(2\times(-1)\right)+\left((-3)\times 4\right)=-14$

$\vec{u}.\vec{w}=(2\times 3)+\left((-3)\times 2\right)=6-6=0$

$\vec{v}.\vec{w}=\left((-1)\times 3\right)+(4\times 2)=-3+8=5$

2. Norme d'un vecteur

Propriété

La norme du vecteur $\vec{u}(x;y)$ est : $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2}$

Exemple

Soit les vecteurs $\vec{u}(3;-4)\ \vec{v}\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\ et\ \vec{w}(1;3)$

On a :

$\|\vec{u}\|=\sqrt{3^2+(-4)^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$

$\|\vec{v}\|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=\sqrt{1}=1$

$\|\vec{w}\|=\sqrt{1+3^2}=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$

3. Distance entre deux points

Propriété

La distance entre deux points $A(x_A;y_A)\ et\ B(x_B;y_B)$ est : $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

Exemple

Soit les deux points $A(-1;1)\ et\ B(4;3)$

$AB=\sqrt{(4-(-1))^2+(3-1)^2}=\sqrt{5^2+2^2}=\sqrt{29}$

4. Orthogonalité de deux vecteurs

Propriété

Si $\vec{u}\ et\ \vec{v}$ sont deux vecteurs du plan tels que $\vec{u}=x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}\ et\ \vec{v}=x'\vec{\imath}+y'\vec{\jmath}$ où x, y, x' et y' sont des nombres réels alors : $(\boldsymbol{\vec{u}\ et\ \vec{v}\ sont\ orthogonaux})$ $\Leftrightarrow \boldsymbol{xx'+yy'=0}$

Application

Soit les points $A(-3;-1)\ B(1;1)\ et\ C(-5;3)$ montre que ABC est un triangle rectangle et isocèle dans A.

Réponse

- On montre que le triangle ABC est rectangle en A.

On a $\overrightarrow{AB}(4;2)\ et\ \overrightarrow{AC}(-2;4)$

Alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=4\times(-2)+2\times 4=0$

Donc $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$

D'où ABC est un triangle rectangle en A

- On montre que le triangle ABC est isocèle en A.

On a $\overrightarrow{AB}(4;2)$

Donc $AB=\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{16+4}=\sqrt{20}$

Et $AC=\|\overrightarrow{AC}\|=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}$

Alors AB=AC d'où ABC est triangle rectangle et isocèle en A.

5. Expression de $\cos(\vec{u},\vec{v})$ et $\sin(\vec{u},\vec{v})$

Propriété :

Soient $\vec{u}(x;y)\ et\ \vec{v}(x';y')$ deux vecteurs non nul.

$\cos(\vec{u};\vec{v})=\frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|}=\frac{xx'+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}.\sqrt{x'^2+y'^2}}$

$\sin(\vec{u};\vec{v})=\frac{\det(\vec{u};\vec{v})}{\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|}=\frac{xy'-x'y}{\sqrt{x^2+y^2}.\sqrt{x'^2+y'^2}}$

Application

Soit les points $A(1;1)\ B(-1;2)\ et\ c(4;5)$

1) Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\ et\ \det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$
2) Calculer $\cos(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})\ et\ \sin(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$

Réponse

1) On a $\overrightarrow{AB}(-2;1) et\ \overrightarrow{AC}(3;4)$

Alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=3\times(-2)+4\times 1=-2$

$\det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 3 & 4\end{vmatrix}=-8-3=-11$

2) On a $AB=\sqrt{(-2)^2+1}=\sqrt{5}\ et\ AC=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$

Alors :

$\cos(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=\frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB.AC}=\frac{-2}{5\sqrt{5}}=\frac{-2\sqrt{5}}{25}$

$\sin(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=\frac{\det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})}{AB.AC}=\frac{-11}{5\sqrt{5}}=\frac{-11\sqrt{5}}{25}$

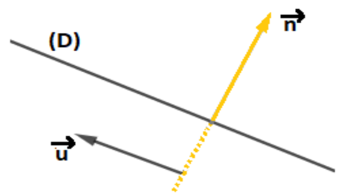
II. Droite définie par un point et un vecteur normal

1. Vecteur normal à une droite

Définition

Soit (D) une droite du plan, **$\vec{u}$ un vecteur directeur** de (D) et $\vec{n}$ un vecteur.

On dit que **$\vec{n}$ est un vecteur normal** à la droite (D) si $\boldsymbol{\vec{n}\neq\vec{0}}$ et $\boldsymbol{\vec{n}\perp\vec{u}}$ $(\vec{n}.\vec{u}=0)$



Exemple

Soient les droites suivantes :

$(D): 2x + 3y - 4 = 0$ et $(\Delta): y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$

- On a $\vec{u}(-3; 2)$ est le vecteur directeur à (D)

Et $\vec{n}(2; 3)$ *est le vecteur normal à* (D)

Car $\vec{n}.\vec{u} = \left(2 \times (-3)\right) + (3 \times 2) = 0$

- On a $\vec{u}'\left(1; \frac{1}{2}\right)$ est le vecteur directeur à (Δ)

Et $\vec{n}'(1; -2)$ *est le vecteur normal* à (Δ)

Car $\vec{n}'.\vec{u}' = (1 \times 1) + \left(\frac{1}{2} \times (-2)\right) = 0$

Remarque

- ✓ Si $\vec{n}$ est un vecteur normal à (D) alors $(\forall k \in IR^*)$ $k\vec{n}$ est aussi un vecteur normal à (D).
- ✓ Si $(D): ax + by + c = 0$ alors $\vec{u}(-b; a)$ est un vecteur directeur de (D).
- ✓ Si $(D): y = mx + b$ alors $\vec{u}(1; m)$ est un vecteur directeur de (D).

2. Equation cartésienne d'une droite définie par un point et un vecteur normal

Propriété

L'équation de la droite passe par point $A(x_A; y_A)$ et qui admet $\vec{n}(\alpha; \beta)$ pour vecteur normal est :

$\alpha(x - x_A) + \beta(y - y_A) = 0$

Exemple

Soient les deux points $A(1; 2)$ *et* $B(4; 3)$

On détermine l'équation cartésienne de (D) passe par A et perpendiculaire sur la droite (AB).

On a $(AB) \perp (D)$ *danc* $\overrightarrow{AB}(3; 1)$ vecteur normal à la droite (D).

Alors $(D): 3(x - 1) + 1(y - 2) = 0$

D'où $(D): 3x + y - 5 = 0$

Application

Soient $A(1; 2)$; $B(-2; 3)$ *et* $C(0; 4)$

Déterminer l'équation cartésienne de la droite (D) médiatrice de segment [AB]

Réponse

On a $(AB) \perp (D)$ alors $\overrightarrow{AB}(-3; 1)$ est vecteur normal sur (D)

Alors $(D): -3x + y + c = 0$

Et on a $I\left(\frac{-1}{2}; \frac{5}{2}\right)$ milieux de segment [AB] appartient à la droite (D).

Donc $\left(-3 \times \left(\frac{-1}{2}\right)\right) + \frac{5}{2} + c = 0$ alors $c = -4$

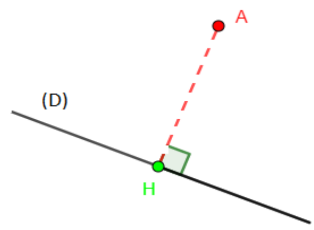
D'où $(D): -3x + y - 4 = 0$

3. Distance d'un point à une droite

Définition

Soit A un point et H est le projeté orthogonal du point A sur (D).

La distance AH est appelée **distance du point A à la droite (D), notée d(A,(D))**.



Propriété :

Soit (D) une droite d'équation $ax + by + c = 0$ et $A(x_A; y_A)$ un point du plan.

On a $d\left(A, (D)\right) = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Exemple

Soit $A(6; 1)$ et $(D): 3x - 4y + 1 = 0$

On a $d\left(A, (D)\right) = \frac{|3\times6-4\times1+1|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = \frac{15}{5} = 3$

III. Étude analytique du cercle

1. L'équation cartésienne de cercle

Propriété :

L'équation cartésienne du cercle (C) de centre $\Omega(a; b)$ et de rayon r (où r > 0) est :

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

Exemple

$x^2 + y^2 = 1$ est l'équation cartésienne du cercle (C) de centre O et de rayon r=1.

$x^2 + y^2 = 9$ est l'équation cartésienne du cercle (C') de centre O et de rayon r=3.

$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 5$ est l'équation cartésienne du cercle (C'') de centre de point $A(-2; 3)$ et de rayon $r = \sqrt{5}$.

Propriété :

Soient $A(x_A; y_A)$ *et* $B(x_B; y_B)$ deux points dans le plan.

L'ensemble des points M qui vérifier $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$ est un cercle de rayon [AB] son équation est :

$(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0$

Remarque

- ✓ Le point M est à l'intérieur du cercle (C) si est seulement si $(x - a)^2 + (y - b)^2 < r^2$
- ✓ Le point M est à l'extérieur du cercle (C) si est seulement si $(x - a)^2 + (y - b)^2 > r^2$

2. Représentation paramétrique d'un cercle

Propriété :
Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$, le système $\begin{cases} x = a + r\cos\theta \\ y = b + r\sin\theta \end{cases}$ $(\theta \in IR)$
Est **une représentation paramétrique** du cercle de centre$\Omega(a,b)$ et de rayon r

Exemple

$\begin{cases} x = 2\cos\theta \\ y = 2\sin\theta \end{cases}$ $(\theta \in IR)$ est une représentation paramétrique du cercle de centre O et de rayon r=2.

$\begin{cases} x = 1 + 3\cos\theta \\ y = -4 + 3\sin\theta \end{cases}$ $(\theta \in IR)$ est une représentation paramétrique du cercle de centre $A(1;-4)$ et de rayon r=3.

3. Ensemble des point $M(x;y)$ du plan qui vérifiant $x^2 + y^2 ax + by + c = 0$

Propriété :
L'ensemble des points $M(x;y)$ du plan vérifiant : $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ où $a, b, et\ c$ sont des nombres réels, est :
Le cercle de centre $\Omega\left(\frac{-a}{2}, \frac{-b}{2}\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}$
Si $a^2 + b^2 - 4c > 0$.

Exemple

Soit (C) l'ensemble des points $M(x;y)$ qui vérifier :
$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$

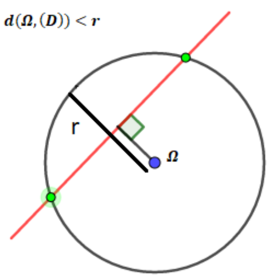
$$M(x;y) \in (C) \Leftrightarrow (x^2 - 2x) + (y^2 + 4y) = 4$$
$$\Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 4y + 4) = 4 + 1 + 4 = 9$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 3^2$$

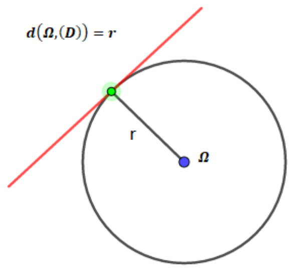
D'où (C) est un cercle de centre $\Omega(1,-2)$ et rayon 3.

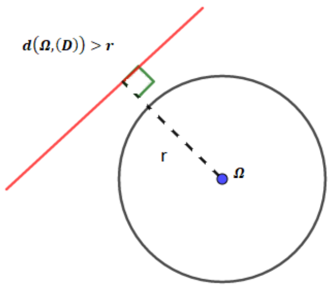
4. Position relatives d'un cercle et d'une droite

Propriété :
Soit une droite (D) et un cercle (C) de centre Ω et de rayon r.

- Si $\boldsymbol{d(\Omega;(D)) < r}$ alors la droite (D) et le cercle (C) se coupent en deux points distincts.
- Si $\boldsymbol{d(\Omega;(D)) = r}$ alors la droite (D) et le cercle (C) se coupent en un seul point.
- Si $\boldsymbol{d(\Omega;(D)) > r}$ alors la droite (D) ne coupe le cercle (C).







Exemple

Soit (C) un cercle d'équation :
$(x-1)^2 + (y-4)^2 = 16$ (D) et (D') deux droites tel que $(D): -x + 2y + 1 = 0$ et $(D'): x + y + 2 = 0$
On a (C) un cercle de centre $\Omega(1;4)$et de rayon $r = 4$

- Puisque $d(\Omega;(D)) = \frac{|-1+(2\times4)+1|}{\sqrt{(-1)^2+2^2}} = \frac{8}{\sqrt{5}} = \frac{8\sqrt{5}}{5}$

Donc $d(\Omega;(D)) < r$
Alors le cercle (C) et la droite (D) se coupent en deux points distincts

- Puisque $d(\Omega;(D')) = \frac{|1+4+2|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{8}{\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{2}$

Donc $d(\Omega;(D')) > r$
Alors la droite (D) ne coupe pas le cercle (C).

5. Équation d'une tangent à un cercle en un point donné

Propriété :
Soit un cercle (C) d'équation cartésienne
$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$
L'équation $xx_A + yy_A + \frac{1}{2}a(x + x_A) + \frac{1}{2}b(y + y_A) + c = 0$ est une équation cartésienne de la tangente à (C) au point $A(x_A; y_A)$.

Exemple

Soit (C) un cercle d'équation :
$(x+1)^2 + (y+2)^2 = 4$ et $A(1;-2)$ appartient à (C)

- L'équation du cercle (C) est :
  $x^2 + y^2 + 2x + 4y + 1 = 0$

Donc l'équation de la tangent à (C) au point $A(1;-2)$ (en utilisant la propriété) est :
$(x \times 1) + (y \times (-2)) + (x+1) + 2(y-2) + 1 = 0$
Alors $2x - 2 = 0$
Donc $x = 1$.