

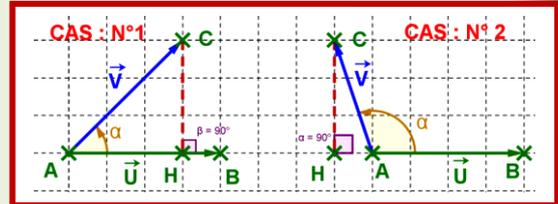
**I. RAPPEL :**

**01. Définition :**

**1.**  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs du plan tel que  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  et  $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ .

le produit scalaire de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  est noté  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  tel que :

- Si  $\vec{v} = \vec{0}$  ou  $\vec{u} = \vec{0}$  on a :  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ .
- Si  $\vec{v} \neq \vec{0}$  et  $\vec{u} \neq \vec{0}$  et H la projection orthogonale de C sur la droite (AB) (A ≠ B car  $\vec{u} \neq \vec{0}$ ) alors



- ❖  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH$  si  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AH}$  ont même sens.
- ❖  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AH$  si  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AH}$  ont les sens opposés.

**2.**  $\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2 = \overrightarrow{AB}^2$  est appelé le carré scalaire de  $\overrightarrow{AB}$  ou de  $\vec{u}$ .

**3.** Le nombre réel positif  $\sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$  est appelé la norme du vecteur  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  et on note  $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}^2}$  ou

$\|\overrightarrow{AB}\| = AB$  (remarque  $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$ ).

**02. Propriétés**

$\vec{u}$  et  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  trois vecteurs du plan tel que :  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  et  $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

**1.** La forme trigonométrique du produit scalaire (avec  $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$  et  $\overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$ ) tel que

$(\vec{u}, \vec{v}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \alpha (2\pi)$  est :  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \cos \alpha$  ou encore  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \cos \alpha$ .

**2.** Symétrie du produit scalaire :  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ .

**3.** Linéarité du produit scalaire :

$$\begin{cases} (\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w} \\ \vec{w} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{w} \cdot \vec{u} + \vec{w} \cdot \vec{v} \\ (\alpha \vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\alpha \vec{v}) = \alpha \times (\vec{u} \cdot \vec{v}) \end{cases}$$

**4.** Positivité du produit scalaire :  $\vec{u}^2 \geq 0$ .

**5.** produit scalaire est non dégénéré :  $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$ .

**6.** orthogonalité de deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  :  $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

**03. Base et repère (orthonormé direct)**

**Définitions :**

- $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  deux vecteurs non colinéaires du plan (P). le couple  $B = (\vec{i}, \vec{j})$  s'appelle base du plan. on dit que le plan (P) est rapporté à la base  $B = (\vec{i}, \vec{j})$  (ou encore le plan (P) est muni à la base  $B = (\vec{i}, \vec{j})$ )
- O est un point de (P) et  $B = (\vec{i}, \vec{j})$  est une base de (P) le triplet  $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$  s'appelle repère de (P). on dit que le plan est rapporté au repère  $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$  (ou encore le plan est muni au repère R)

- $B = (\vec{i}, \vec{j})$  est une base orthonormée si et seulement si  $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$  et  $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$ . Dans ce cas le repère  $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$  est appelé repère orthonormé.
- $B = (\vec{i}, \vec{j})$  est une base orthonormée directe si et seulement si  $B = (\vec{i}, \vec{j})$  est une base orthonormée et  $\arg(\vec{i}, \vec{j}) = \frac{\pi}{2} \text{ (} 2\pi \text{)}$ .  $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$ . Dans ce cas le repère  $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$  est appelé repère orthonormé direct.

## II. L'expression analytique du produit scalaire et la norme d'un vecteur dans un repère orthonormé :

▲ **Remarque :** dans toute la suite du chapitre le plan (P) est rapporté à un repère  $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$  orthonormé direct

▲ **L'expression analytique de :**  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  et  $\|\vec{u}\|$  et AB

### 01. Activité :

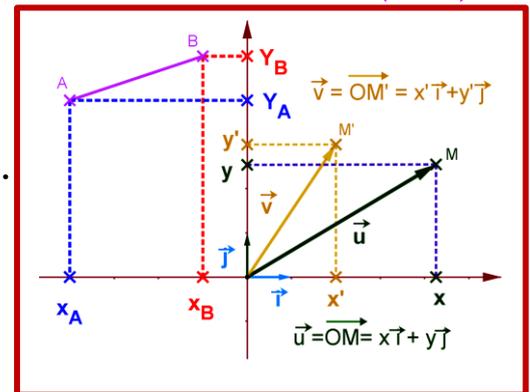
$\vec{u}(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j}$  et  $\vec{v}(x', y') = x'\vec{i} + y'\vec{j}$  deux vecteurs du plan (P).

1. Calculer :  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  en fonction de x et y et x' et y' puis  $\|\vec{u}\|$  en fonction de x et y.

2. Donner une condition nécessaire et suffisante en fonction de x et y et x' et y' tel que  $\vec{u} \perp \vec{v}$ .

3. Calculer la distance AB en fonction des coordonnées de  $A(x_A, y_A)$  et  $B(x_B, y_B)$ .

4. Donner la propriété.



### 02. Propriété :

$\vec{u}(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j}$  et  $\vec{v}(x', y') = x'\vec{i} + y'\vec{j}$  deux vecteurs du plan (P) . on a :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = (x, y) \cdot (x', y') = xx' + yy'$ .
- $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ .
- $AB = \|\vec{AB}\| = \sqrt{(x_B^2 - x_A^2) + (y_B^2 - y_A^2)}$  avec  $A(x_A, y_A)$  et  $B(x_B, y_B)$ .
- $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow xx' + yy' = 0$ .

### 03. Exemple :

On donne :  $\vec{u}(2, -4)$  et  $\vec{v}(-1, 2)$  et  $A(1, 0)$  et  $B(-1, 0)$ .

1. Calculer :  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  et  $\|\vec{u}\|$  et AB .

2. Déterminer le vecteur  $\vec{v}(x, y)$  unitaire et colinéaire à  $\vec{v}$  (c.à.d.  $\|\vec{v}\| = 1$ ).

3. Montrer que : le triangle ABC est rectangle en A tel que :  $A(1, 3)$  et  $B(3, 1)$  et  $C(-3, -1)$ .

4. Déterminer un vecteur directeur de la hauteur issue du sommet A .

• (triangulaire) .

## III. Formules de : $\sin(\vec{u}, \vec{v})$ et $\cos(\vec{u}, \vec{v})$ :

▲ **Formules de :**  $\sin(\vec{u}, \vec{v})$  et  $\cos(\vec{u}, \vec{v})$  :

**01. Activité :**

$\vec{u}(x,y) = x\vec{i} + y\vec{j}$  et  $\vec{v}(x',y') = x'\vec{i} + y'\vec{j}$  deux vecteurs **non nuls** de (P) . on pose  $(\vec{u}, \vec{v}) \equiv \alpha (2\pi)$  et le vecteur  $\vec{w}(-y;x)$  . ( voir la figure )

**1.** Donner :  $\cos(\vec{u}, \vec{v})$  en fonction de x et y et x' et y' .

**2.** Calculer  $\vec{v} \cdot \vec{w}$  et  $\det(\vec{u}, \vec{v})$  et  $\|\vec{u}\|$  et  $\|\vec{w}\|$  ; quelle remarque peut-on tirer ?

**3.** Montrer que :  $(\vec{v}, \vec{w}) \equiv \frac{\pi}{2} - \alpha (2\pi)$  ( on peut utiliser  $(\vec{u}, \vec{w}) \equiv (\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w}) : (2\pi)$  ) .

**4.** Donner l'expression trigonométrique de  $\vec{v} \cdot \vec{w}$  et on déduit que :  $\sin \alpha$  ( réponse :

$$\left( \sin \alpha = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\|\vec{v}\| \|\vec{w}\|} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\|\vec{v}\| \|\vec{u}\|} \right) .$$

**5.** on déduit  $\sin \alpha$  : en fonction de  $\det(\vec{u}, \vec{v})$  et  $\|\vec{u}\|$  et  $\|\vec{v}\|$  ; puis en fonction de

$$x \text{ et } y \text{ et } x' \text{ et } y' \text{ ( réponse } \left( \sin \alpha = \frac{\det(\vec{u}, \vec{v})}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} \right) ) .$$

**02. propriété :**

$\vec{u}(x,y) = x\vec{i} + y\vec{j}$  et  $\vec{v}(x',y') = x'\vec{i} + y'\vec{j}$  deux vecteurs **non nuls** de (P) avec  $(\vec{u}, \vec{v}) \equiv \alpha (2\pi)$  .

$$\text{on a : } \cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} = \frac{xx' + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{x'^2 + y'^2}} \text{ et } \sin \theta = \frac{\det(\vec{u}, \vec{v})}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} = \frac{xy' - yx'}{\sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{x'^2 + y'^2}} .$$

**B. l'aire ( ou surface ) d'un triangle et d'un parallélogramme :**

**01. Activité :**

Dans le plan (P) on considère un triangle ABC non aplati et H la projection orthogonale de C sur la droite (AB) .

**1.** Donner la surface S de ABC .

**2.** Exprimer S en fonction de  $\left| \sin \left( (\vec{AB}, \vec{AC}) \right) \right|$  .

**3.** Exprimer S en fonction de  $\det(\vec{AB}, \vec{AC})$  .

**4.** On déduit la surface du parallélogramme ABCD .

**02. Propriété :**

ABC est un triangle dans le plan (P) .

• La surface  $S_{ABC}$  du triangle ABC est :  $S_{ABC} = \frac{1}{2} \left| \det(\vec{AB}, \vec{AC}) \right|$  .

• La surface  $S_{ABCD}$  du triangle ABC est :  $S_{ABCD} = \left| \det(\vec{AB}, \vec{AC}) \right|$  .

#### IV. La droite dans le plan ( étude analytique ) :

##### A. vecteur normal :

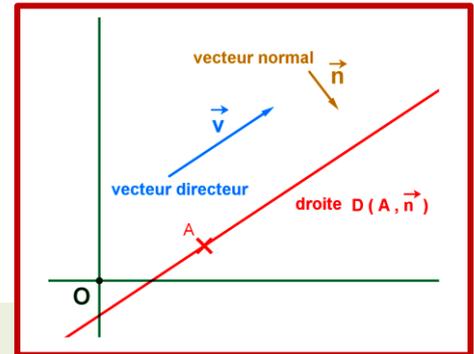
###### 01. Activité :

$D(A, \vec{u})$  est une droite dans le plan (P) . Que remarquez-vous ?

###### 02. Définition :

$D(A, \vec{u})$  est une droite dans le plan (P) .

Tout vecteur  $\vec{n}$  non nul orthogonal au vecteur directeur  $\vec{u}$  de la droite  $D(A, \vec{u})$  s'appelle vecteur normal à la droite  $D(A, \vec{u})$  .



###### 03. remarque :

- Les vecteurs  $\alpha \vec{n}$  ( avec  $\alpha \neq 0$  ) sont normaux à la droite  $D(A, \vec{u})$  .
- $\vec{n}$  et  $\vec{n}'$  sont normaux à la droite  $D(A, \vec{u})$  donc  $\vec{n}$  et  $\vec{n}'$  sont colinéaires .
- $\vec{n}(a,b)$  normal à la droite (D) équivaut  $\vec{u}(-b,a)$  est un vecteur directeur à la droite (D) .

##### B. Ensemble des points M tel que $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$

###### 01. Activité :

A est un point de (P) et  $\vec{n}$  est un vecteur non nul de (P) .

**1.** Déterminer l'ensemble des points  $M(x,y)$  de (P) tel que  $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$  .

###### 02. Propriété :

l'ensemble des points  $M(x,y)$  de (P) tel que  $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$  est la droite  $D(A, \vec{n})$  passant par A dont le vecteur normal est  $\vec{n}$  .

##### C. Equation cartésienne de la droite $D(A, \vec{n})$ :

###### 01. Activité :

$D(A, \vec{u})$  est une droite dans le plan (P) tel que  $A(x_A, y_A)$  et  $\vec{n}(a,b)$  est un vecteur normal de  $D(A, \vec{u})$  ;  $M(x,y)$  est un point de (P) .

**1.** Montrer que :  $M(x,y) \in D(A, \vec{n}) \Rightarrow ax + by + c = 0$  ; on détermine c .

**2.** On étudier la réciproque : E est l'ensemble des points  $M(x,y)$  de (P) tel que  $ax + by + c = 0$  avec  $(a,b) \neq (0,0)$  montrer que l'ensemble E est la droite  $D(A, \vec{n})$  .

###### 02. Propriété et définition :

- $M(x,y)$  est un point de (P) appartient à la droite  $D(A(x_A, y_A) ; \vec{n}(a,b))$  si et seulement si  $ax + by + c = 0$  et  $(a,b) \neq (0,0)$  et  $c = -ax_A - by_A$  .
- $ax + by + c = 0$  s'appelle l'équation cartésienne de la droite  $D(A, \vec{n})$

**03. Remarque :**

Pour l'équation cartésienne **(D) :  $ax+by+c=0$**  on a :

- $\vec{n}(a,b)$  vecteur normal à la droite **(D)** .
- $\vec{u}(-b,a)$  vecteur directeur à la droite **(D)** .

**04. Application :**

**1.** Donner l'équation cartésienne de la droite  $D \left( A \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right)$  .

**2.** On considère le triangle ABC tel que  $A(2,1)$  et  $B(0,1)$  et  $C(-2,3)$  .

- Déterminer les équations cartésiennes de la médiatrice de  $[AB]$  et  $[AC]$  .
- Déterminer  $\Omega$  le centre du cercle circonscrit au triangle ABC .

**Correction :**

**1.** Equation cartésienne de la droite  $D \left( A \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right)$  . On a :

- $\vec{n}(1,5)$  est un vecteur normal à la droite **(D)** donc une équation est de la forme **(D) :  $1x+5y+c=0$**  .
- Le point  $A \in (D)$  donc :  $A(2,0) \in (D) : 1 \times 2 + 5 \times 0 + c = 0$  d'où  $c = -2$  .

**Conclusion :** Equation cartésienne est **(D) :  $1x+5y-2=0$**  .

**2.** les équations cartésiennes de la médiatrice de  $[AB]$  et  $[AC]$  .

**a.** Equation cartésienne de  $(D_1)$  la médiatrice de  $[AB]$  .

- $(D_1)$  médiatrice de  $[AB]$  donc  $(AB) \perp (D_1)$  d'où  $\overline{AB}$  est normal à la droite  $(D_1)$  .
- $I(1,1)$  est le milieu de  $[AB]$  donc  $(D_1)$  passe par  $I$  .

D'où :  $M(x;y) \in (D) \Leftrightarrow \overline{IM} \cdot \overline{AB} = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow x-1=0$$

**Donc :**  $(D_1) : x-1=0$

**b.** Equation cartésienne de  $(D_1)$  la médiatrice de  $[AC]$  .

- $(D_2)$  médiatrice de  $[AC]$  donc  $(AC) \perp (D_2)$  d'où  $\overline{AC}$  est normal à la droite  $(D_2)$  .
- $J(-1,2)$  est le milieu de  $[AC]$  donc  $(D_2)$  passe par  $J$  .

D'où :  $M(x;y) \in (D') \Leftrightarrow \overline{JM} \cdot \overline{BC} = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x+1 \\ y-2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow -2(x+1) + 2(y-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow -2x + 2y - 6 = 0$$

**Donc** :  $(D_2) : -x + y - 3 = 0$

**b.** On détermine  $\Omega$  le centre du cercle circonscrit au triangle ABC .

On sait que l'intersection des médiatrices est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC .

$$\text{Donc : } \Omega(x, y) \in (D) \cap (D') \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ -x + y - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases}$$

D'où :  $\Omega(1, 4)$  .

**Conclusion** :  $\Omega(1, 4)$  est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC .

**D.** Orthogonalité de deux droites (D) et (D') :

**01.** Activité :

**1.**  $D(A, \vec{u})$  et  $D'(B, \vec{u}')$  deux droites de (P) dont on a les vecteurs directeur .

Déterminer une condition nécessaire et suffisante tel que  $(D') \perp (D)$  .

**2.**  $D(A, \vec{n})$  et  $D'(B, \vec{n}')$  deux droites de (P) dont on a les vecteurs normaux .

Déterminer une condition nécessaire et suffisante tel que  $(D') \perp (D)$  .

**02.** Propriété :

On considère les droites (D) et (D') d'équations cartésiennes : (D) :  $ax + by + c = 0$  et

(D') :  $a'x + b'y + c' = 0$  tel que  $\vec{n}(a, b)$  et  $\vec{n}'(a', b')$  sont les vecteurs normaux respectivement à

(D) et (D') . on a :  $(D') \perp (D) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow aa' + bb' = 0$  .

**03.** Application :

Déterminer une équation cartésienne d'une droite (D') orthogonale à (D) tel que :

(D) :  $2x + y - 3 = 0$  .

**E.** Distance d'un point à une droite (D) .

**01.** Activité :

Comment on détermine la plus proche distance du point A à la droite (D) .

**02.** Définition :

$D(A, \vec{u})$  est une droite du plan (P) et A est un point de (P) et H sa projection orthogonale sur (D) . la distance AH est appelée la distance de A à (D) et on note  $d(A, (D)) = d = AH$  .

**03.** Activité :

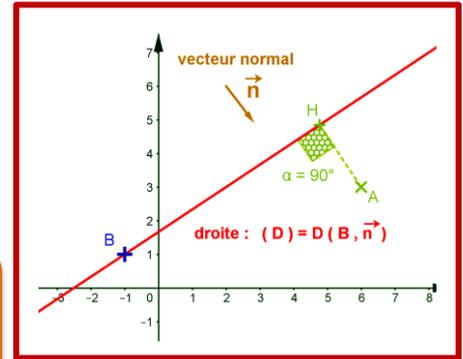
$D(A, \vec{u})$  est une droite du plan (P) tel que son équation cartésienne est (D) :  $ax + by + c = 0$  et

$A(x_A, y_A)$  est un point de (P) et  $H(x_H, y_H)$  sa projection orthogonale sur (D) .

**1.** Montrer que  $c = -ax_H - by_H$  puis  $|\vec{n} \cdot \vec{AH}| = |ax_A + by_A + c|$ .

**2.** Montrer que  $|\vec{n} \cdot \vec{AH}| = |ax_A + by_A + c|$ .

**3.** On déduit AH en fonction de a et b et  $x_A$  et  $y_A$ .



**04. Propriété :**

La distance du point  $A(x_A, y_A)$  de  $(P)$  à une droite d'équation

cartésienne  $(D) : ax + by + c = 0$  est :  $d(A; D) = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ .

**05. Exemple :**

$(D') : -x + y - 3 = 0$  et  $A(2, 5)$  on a  $d(A; D) = \frac{|-2 + 5 - 3|}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2}} = 0$  donc  $A \in (D)$ .

**V. Le cercle étude analytique :**

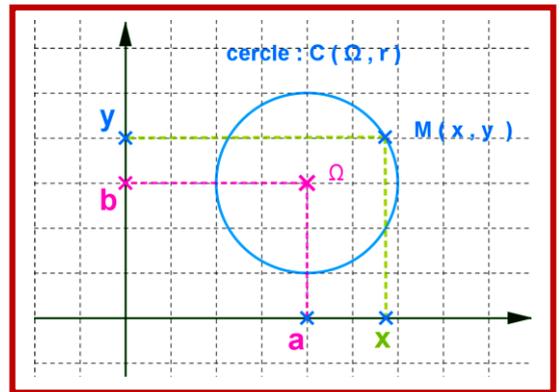
**A. Equation cartésienne du cercle  $C(\Omega(a, b); r)$ .**

**01. Activité :**

$\Omega(a, b)$  est un point de  $(P)$  et  $r \in \mathbb{R}^{+*}$ , ( $r > 0$ ).

**1.** Compléter l'équivalence suivant on utilise a et b et x et y

$M(x, y) \in C(\Omega(a, b); r) \Leftrightarrow \dots\dots\dots$



**02. Propriété :**

Tout cercle  $C(\Omega(a, b); r)$  du plan  $(P)$  a pour équation cartésienne de la forme  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$  ou encore :  $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$  avec  $c = a^2 + b^2 - r^2$ .

**03. Exemple :**

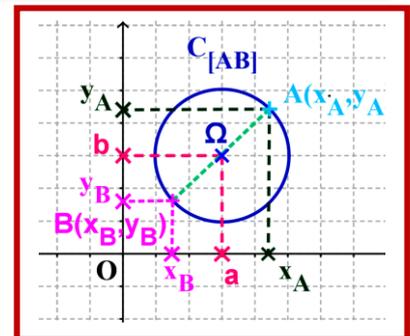
- Donner équation cartésienne du cercle  $C(\Omega(0, 0); 1)$ .
- Donner équation cartésienne du cercle de diamètre  $[AB]$  avec :  $A(1; 0)$  et  $B(-1; 0)$ .

**B. Equation cartésienne du cercle de diamètre  $[AB]$ .**

**01. Activité :**

$M(x; y)$  est un point de  $(P)$ ;  $C_{[AB]}$  est cercle de diamètre  $[AB]$  avec  $A \neq B$ .

**1.** Trouver une condition nécessaire et suffisante de  $M(x; y) \in C_{[AB]}$



**02. Propriété :**

Equation cartésienne du cercle de diamètre  $[AB]$  est :  $M(x; y) \in C_{[A; B]} \Leftrightarrow \vec{AM} \cdot \vec{BM} = 0$ .

**03. Exemple :**

$A(1; 0)$  et  $B(-1; 0)$  deux points de  $(P)$ . trouver équation cartésienne de  $C_{[AB]}$ .

**Correction :** On trouve équation cartésienne de  $C_{[AB]}$ .

On a :  $M(x; y) \in C_{[A; B]} \Leftrightarrow \vec{AM} \cdot \vec{BM} = 0$ .

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-1 \\ y-0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x+1 \\ y-0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 1 = 0$$

**Conclusion :**  $C_{[AB]} : x^2 + y^2 - 1 = 0$  .

### C. Le cercle passant par trois points :

Le cercle passant par trois A et B et C non alignés c'est le cercle circonscrit au triangle ABC tel que son centre  $\Omega$  est l'intersection des médiatrices et son rayon est  $r = \Omega A$  .

### D. Présentation paramétrique d'un cercle :

#### 01. Activité :

$C(\Omega(a,b);r)$  est un cercle du plan (P) rapporté au repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  tel que  $\theta \in \mathbb{R}$  ;  
 $(\vec{i}, \overrightarrow{\Omega M}) \equiv \theta : (2\pi)$  .

**1.** Calculer :  $\vec{j} \cdot \overrightarrow{\Omega M}$  ;  $\vec{i} \cdot \overrightarrow{\Omega M}$  .

**2.** Déterminer les coordonnées du point M par rapport au repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  .

**3.** D'après  $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega M}$  , montrer que :  $\begin{cases} x = a + R \cos \theta \\ y = b + R \sin \theta \end{cases}$  .

#### 02. Propriété :

$C(\Omega(a,b);r)$  est un cercle du plan (P) rapporté au repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  tel que  $\theta \in \mathbb{R}$  ;  
 $(\vec{i}, \overrightarrow{\Omega M}) \equiv \theta : (2\pi)$  ; pour tout  $M(x,y)$  du plan (P) on a :  $\begin{cases} x = a + R \cos \theta \\ y = b + R \sin \theta \end{cases}$  .  
 On l'appelle présentation paramétrique d'un cercle  $C(\Omega(a,b);r)$  .

#### 03. Exemple :

Donner présentation paramétrique d'un cercle trigonométrique lié au repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  ( $C(O(0,0);1)$ )

**E. Etude l'ensemble des points :**  $\{M(x,y) / x^2 + y^2 + ax + by + c = 0\}$  . avec a et b et c de  $\mathbb{R}$

#### 01. Activité :

**1.** Trouver l'ensemble des points  $M(x,y)$  du plan (P) qui vérifie  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$  .

**2.** Donner la propriété

#### 02. Propriété :

L'ensemble des points  $M(x,y)$  du plan (P) qui vérifie  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$  est :

- Si  $A = a^2 + b^2 - 4c < 0$  on a :  $S = \emptyset$  .
- Si  $A = a^2 + b^2 - 4c = 0$  on a :  $S = \left\{ \Omega \left( -\frac{a}{2}; -\frac{b}{2} \right) \right\}$  (un point et un seul qui est  $\Omega \left( -\frac{a}{2}; -\frac{b}{2} \right)$ )
- Si  $A = a^2 + b^2 - 4c > 0$  on a :  $S = (C) = C \left( \Omega \left( -\frac{a}{2}; -\frac{b}{2} \right); r = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2} \right)$  (un cercle) .

**F. Etude les positions relatives d'un cercle et une droite .**

**01. Activité :**

Tracer les positions relatives d'une droites (D) et un cercle (C) , puis donner les définitions et les propriétés .

La droite (D) et le cercle (C) sont disjoints	La droite (D) est tangente au cercle (C) en $A \in (C)$	La droite (D) coupe le cercle en 2 points A et B

**02. Définitions et propriétés :**

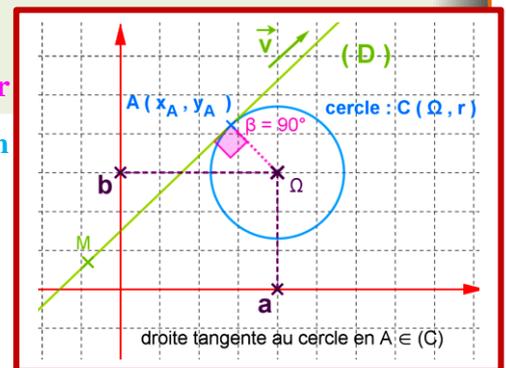
(D) est une droite du plan (P) et (C) est un cercle du plan (P) de centre  $\Omega$  et de rayon r .

- (D) est à l'extérieur du cercle (C) ((D) et (C) sont disjoints  $(D) \cap (C) = \emptyset$  ) .
- (D) coupe le l'extérieur du cercle (C) si et seulement si  $d(\Omega, (D)) > r$
- (D) coupe le cercle (C) en deux points A et B ((D)  $\cap$  (C) = {A, B} ) .
- (D) coupe le cercle (C) si et seulement si  $d(\Omega, (D)) < r$
- (D) est tangente au cercle (C) ((D)  $\cap$  (C) = {A} ) .
- (D) est tangente au cercle (C) si et seulement si  $d(\Omega, (D)) = r$

**G. Equation cartésienne d'une droite tangente à un cercle en un point A du cercle .**

**01. Activité :**

$D(A, \vec{u})$  est une droite du plan (P) et A est un point d' un cercle  $C(\Omega, r)$  tel que (D) est tangente à (C) .



**1.** Trouver condition nécessaire et suffisante tel que  $M(x, y)$  appartienne à (D) .

**2.** On déduit l'équation cartésienne de  $D(A; \vec{u})$  ; puis donner la propriété .

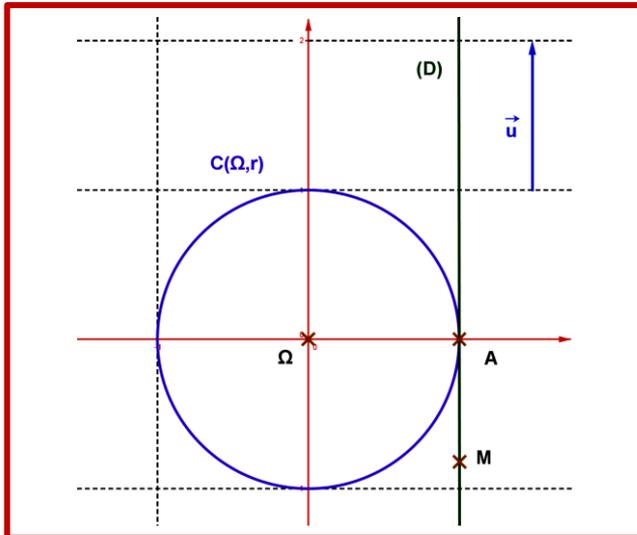
**02. Propriété :**

l'équation cartésienne de la droite  $D(A; \vec{u})$  tangente au cercle  $C(\Omega, r)$  en un point  $A(x_A, y_A)$  de

$C(\Omega, r)$  est :  $\vec{\Omega A} \cdot \vec{u} = 0$  ou encore  $\begin{pmatrix} x_A - a \\ y_A - b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix} = 0$  .

**03. Exemple :**

Géométriquement donner l'équation cartésienne de la droite  $D(A; \vec{u})$  qui tangente au cercle  $(C)$ .



**VI.** Ensemble des points  $M$  du plan  $(P)$  tel que :  $MA^2 - MB^2 = k$  ;  $MA^2 + MB^2 = k$  ; avec  $k \in \mathbb{R}$ .

$A$  et  $B$  deux points de  $(P)$  tel que :  $AB = 6$  et  $I$  est le milieu de  $[AB]$ .

**1<sup>er</sup> cas :**  $MA^2 + MB^2 = k$ .

**1.** Déterminer  $(G_1)$  l'ensemble des points  $M$  de  $(P)$  tel que  $MA^2 + MB^2 = 68$ .

**2.** Déterminer  $(G_2)$  l'ensemble des points  $M$  de  $(P)$  tel que  $MA^2 + MB^2 = 18$ .

**3.** Déterminer  $(G_3)$  l'ensemble des points  $M$  de  $(P)$  tel que  $MA^2 + MB^2 = 4$ .

**2<sup>ème</sup> cas :**  $MA^2 - MB^2 = k$ .

**1.** Déterminer  $(H_1)$  l'ensemble des points  $M$  de  $(P)$  tel que  $MA^2 - MB^2 = 0$ .

**2.** Déterminer  $(H_2)$  l'ensemble des points  $M$  de  $(P)$  tel que  $MA^2 - MB^2 = 36$ .

**▲ Remarque :**

On peut étudier les 2 cas précédents dans le cas général c.à.d.  $k \in \mathbb{R}$  et  $AB$  et on discute avec disjonction des cas.