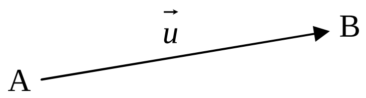
Produit Scalaire

Site MathsTICE de Adama Traoré Lycée Technique Bamako

I- Norme d'un vecteur

1°) Définition : $\vec{u}$ étant un vecteur de représentant le bipoint (A;B), on appelle norme de $\vec{u}$ le nombre réel positif noté : $\|\vec{u}\| = d(A;B)$.



$$\|\vec{u}\| = \|\overrightarrow{AB}\| = d(A;B) = AB$$

2°) Propriétés : Soit $\mathcal{V}$ l'ensemble des vecteurs du plan

P_1) : $\forall\ \vec{u} \in \mathcal{V}, \|\vec{u}\| > 0$.

P_2) : $\forall\ \vec{u} \in \mathcal{V}, \|\vec{u}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$.

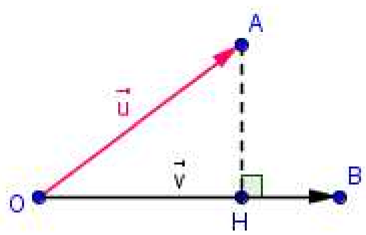
P_3) : $\forall\ \vec{u} \in \mathcal{V},\ \forall\ \vec{v} \in \mathcal{V}$ et $\forall\ k \in \mathbb{R}$, si $\vec{u} = k \times \vec{v}$ alors $\|\vec{u}\| = |k| \times \|\vec{v}\|$.

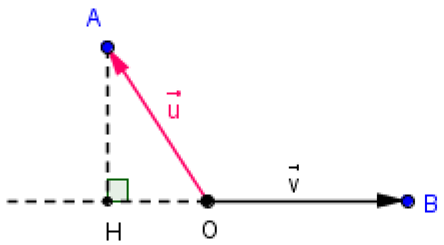
3°) Egalité de deux vecteurs non nuls

Deux vecteurs non nuls sont dits égaux s'ils ont même norme, même direction et même sens.

II- Produit scalaire

1°) Définition : soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.





On appelle produit scalaire du vecteur $\vec{u}$ par le vecteur $\vec{v}$ le réel noté : $\vec{u} \bullet \vec{v}$ tel que : $\vec{u} \bullet \vec{v} = \overline{OH} \times \overline{OB} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{OB}$ où H est le projeté orthogonal de A sur la droite (OB). $\vec{u} \bullet \vec{v} = \overline{OH} \times \overline{OB}$. (***Expression algébrique du produit scalaire***)

Remarque :

Si l'angle ($\overrightarrow{OA}$; $\overrightarrow{OB}$) est aigu alors le produit scalaire $\overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{OB}$ est positif ;

Si l'angle ($\overrightarrow{OA}$; $\overrightarrow{OB}$) est obtus alors le produit scalaire $\overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{OB}$ est négatif .

2°) Propriétés du produit scalaire

On démontre et on admettra les propriétés suivantes

P_1) $\vec{u} \bullet \vec{v} = \vec{v} \bullet \vec{u}$

P_2) $(k\vec{u}) \bullet \vec{v} = \vec{u} \bullet (k\vec{v}) = k \times (\vec{u} \bullet \vec{v})$

P_3) $\vec{u} \bullet (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \bullet \vec{v}) + (\vec{u} \bullet \vec{w})$ et $(\vec{v} + \vec{w}) \bullet \vec{u} = (\vec{v} \bullet \vec{u}) + (\vec{w} \bullet \vec{u})$

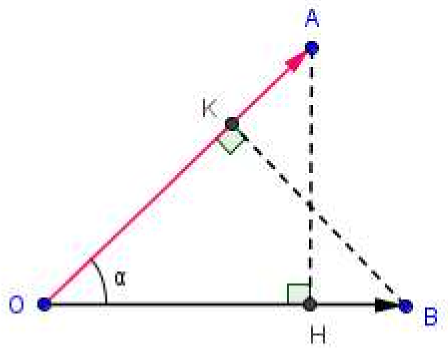
P_4) $\vec{u} \bullet \vec{u} \geq 0$ et si $\vec{u} \neq \vec{0}$ alors $\vec{u} \bullet \vec{u} \succ 0$.

P_5) $\vec{u} \bullet \vec{0} = 0$.

Remarque : $\vec{u} \bullet \vec{u}$ se note $\vec{u}^{\,2} = \left\| \vec{u} \right\|^2$ et « on lit carré scalaire de $\vec{u}$ ».

3°) Expression trigonométrique du produit scalaire

Soit $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ deux vecteurs du plan



$\overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{OB} = \overline{OH} \times \overline{OB} = OH \times OB$

$= \overline{OK} \times \overline{OA} = OK \times OA$

$\overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{OB} = OH \times OB$ Calculons OH ; cos(BÔA) = $\dfrac{OH}{OA}$ OH = OA × cos(BÔA)

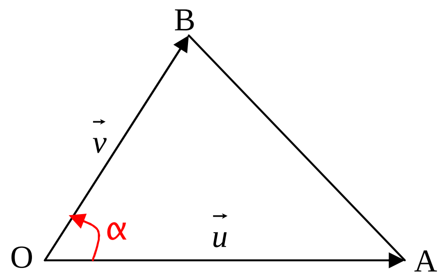
D'où $\overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{OB} = OA \times OB \times \cos\alpha$ où α est une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OB})$

. $\boxed{\overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{OB} = OA \times OB \times \cos\alpha}$. (**Expression trigonométrique du produit scalaire**).

Remarque : Si $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$ alors $\overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{OB} = OA \times OB \times \cos\dfrac{\pi}{2} = 0$

4°) Produit scalaire et triangle

Soit O, A, B trois points non alignés du plan tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ *et* $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$.



Calculons le carré scalaire : $\left(\vec{u}-\vec{v}\right)^2$

$\left(\vec{u}-\vec{v}\right)^2=\vec{u}^2-2\,\vec{u}\bullet\vec{v}+\vec{v}^2 \Leftrightarrow -2\,\vec{u}\bullet\vec{v}=\left(\vec{u}-\vec{v}\right)^2-\vec{u}^2-\vec{v}^2 \Leftrightarrow 2\vec{u}\bullet\vec{v}=\vec{u}^2+\vec{v}-\left(\vec{u}-\vec{v}\right)^2$

$\Leftrightarrow\ \vec{u}\bullet\vec{v}=\dfrac{\vec{u}^2+\vec{v}^2-\left(\vec{u}-\vec{v}\right)^2}{2}$ or $\vec{u}-\vec{v}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{BA}$.

D'où : $\overrightarrow{OA}\bullet\overrightarrow{OB}=\dfrac{OA^2+OB^2-AB^2}{2}$.

5°) Calcul du sinus d'un angle orienté

Soient $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$deux vecteurs dans la base $\mathcal{B}(\vec{i};\vec{j})$ et α une mesure de l'angle $\left(\vec{u};\vec{v}\right)$. Nous avons les formules suivantes :

$$Sin\alpha=\frac{dét\left(\vec{u};\vec{v}\right)}{\left\|\vec{u}\right\|\times\left\|\vec{v}\right\|} \quad et \quad Cos\alpha=\frac{\vec{u}\bullet\vec{v}}{\left\|\vec{u}\right\|\times\left\|\vec{v}\right\|}$$

III- Étude analytique du produit scalaire

1°) Expression du produit scalaire dans une base orthonormale

Soit $(\vec{i};\vec{j})$ une base orthonormée de $\mathcal{V}$ et soient $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$deux vecteurs de $\mathcal{V}$. Calculons $\vec{u}\bullet\vec{v}$ en fonction des coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

$\vec{u}\bullet\vec{v}=\left(x\vec{i}+y\vec{j}\right)\bullet\left(x'\vec{i}+y'\vec{j}\right)=(xx')\vec{i}^2+(xy')\left(\vec{i}\bullet\vec{j}\right)+(yx')\left(\vec{j}\bullet\vec{i}\right)+(yy')\vec{j}^2$

$(\vec{i};\vec{j})$ étant une base orthonormée on a : $\left\|\vec{i}\right\|=1$; $\left\|\vec{j}\right\|=1$ et $\vec{i}\bullet\vec{j}=0$

D'où : $\vec{u}\bullet\vec{v}=x\,x'+y\,y'$.

2°) Expression de la norme d'un vecteur dans une base orthonormée

Soit $\vec{u}(x;y)$ dans la base orthonormée $(\vec{i};\vec{j})$. $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$.

$$\begin{aligned}\left\|\vec{u}\right\|^2&=\vec{u}^2\\&=\left(x\vec{i}+y\vec{j}\right)\bullet\left(x\vec{i}+y\vec{j}\right)\\&=x^2\,\vec{i}^2+(2xy)\left(\vec{i}\bullet\vec{j}\right)+y^2\,\vec{j}^2\\&=x^2+y^2 \quad ; \quad donc \quad \left\|\vec{u}\right\|=\sqrt{x^2+y^2}\end{aligned}$$

$$\left\|\vec{u}\right\|=\sqrt{x^2+y^2}$$

3°) droites perpendiculaires

Soient les droites (D) de vecteur directeur $\vec{u}(a;b)$ et (D') de vecteur directeur $\vec{v}(a';b')$ dans une base orthonormée.

(D) ⊥ (D') ⇔ $\vec{u}\bullet\vec{v}=0$ ⇔ aa' + bb' = 0 .

Exemple :

Soient (D) : 3x + 2y – 1 = 0 et (D') : 2x – 3y + 5 = 0.

Montrer que (D) et (D') sont perpendiculaires.

4°) Équation d'un cercle

Soit $(O;\vec{i}\,;\vec{j})$ un repère orthonormé du plan $\mathcal{P}$. soit I(a ; b) un point du plan et r un réel strictement positif.
Le cercle de centre I et de rayon r est l'ensemble des points M(x ;y) de $\mathcal{P}$ tels que la distance de I à M est égale à r.
Soit $\mathcal{C}$ = {M∊ P / d(I ;M) = r } ; d(I; M) = r ⇔ $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r$ ⇔

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Remarque

. Un point M appartient au cercle $\mathcal{C}$ de diamètre [AB]⇔($\overrightarrow{AM}\bullet\overrightarrow{BM}=0$)

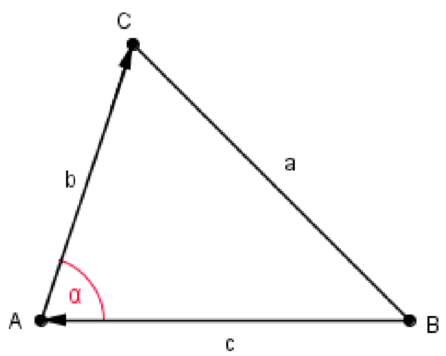
Exemple

Déterminer une équation du cercle de diamètre [AB], où A(2 ;3) et B(–1 ; 0).

IV- Applications du produit scalaire

1°) Généralisation du théorème de Pythagore (ou loi du cosinus)

a) Soit ABC un triangle quelconque tels que AB = c ; AC = b ; BC = a.



Comme $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}$; on peut écrire

$$\overrightarrow{BC}^2=\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)^2=\overrightarrow{BA}^2+2\overrightarrow{BA}\bullet\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}^2$$

$$\overrightarrow{BC}^2=\overrightarrow{BA}^2+\overrightarrow{AC}^2-2\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{BC}^2=\overrightarrow{BA}^2+\overrightarrow{AC}^2-2\times AB\times AC\times\cos(\alpha)$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\times AB\times AC\times\cos(\alpha)$$

- Si l'angle Â est droit alors on a: . $BC^2 = AB^2 + AC^2$. car cos(α) = 0.

On retrouve ainsi ***le théorème de Pythagore***

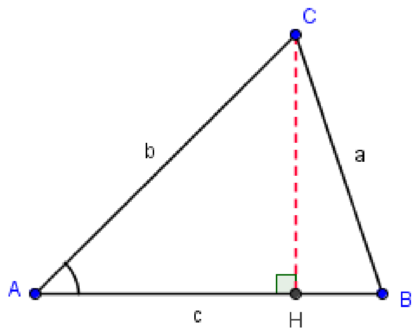
b) Conclusion :
Dans un triangle ABC si on désigne par AB = c ; AC = b ; BC =a ;
mes(BÂC) = Â ; mes(A$\hat{C}$B) = $\hat{C}$; mes(C$\hat{B}$A) = $\hat{B}$, alors on a :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\times b\times c\times\cos(\hat{A})$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\times a\times c\times\cos(\hat{B})$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\times a\times b\times\cos(\hat{C})$$

Relation **d'AL–KASHI**

2°) Aire d’un triangle

L’aire $\boldsymbol{a}$ du triangle ABC est donnée par la formule



$$\boldsymbol{a} = \frac{1}{2}\times b\times c\times \sin(\hat{A})$$

$$\boldsymbol{a} = \frac{1}{2}\times a\times b\times \sin(\hat{C})$$

$$\boldsymbol{a} = \frac{1}{2}\times a\times c\times \sin(\hat{B})$$

3°) Formule des trois sinus

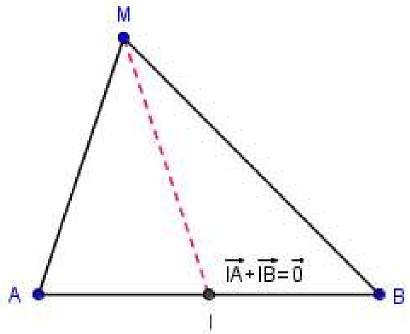
On utilise les formules précédentes

- De $\boldsymbol{a} = \frac{1}{2}\times b\times c\times \sin(\hat{A}) = \frac{1}{2}\times a\times b\times \sin(\hat{C})$ on déduit $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$
- De $\boldsymbol{a} = \frac{1}{2}\times b\times c\times \sin(\hat{A}) = \frac{1}{2}\times a\times c\times \sin(\hat{B})$ on déduit $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$
- D’où : $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2\times R$.

  (**R** étant le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC).

4°) Ensemble (E) des points M du plan tels que : $\overrightarrow{MA}\bullet\overrightarrow{MB} = k \quad (k \in IR)$

Considérons un segment [AB] de milieu I. soit M un point du plan.



$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MA}\bullet\overrightarrow{MB} &= \left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)\bullet\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)\\
&= \overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{MI}\bullet\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right) + \overrightarrow{IA}\bullet\overrightarrow{IB}\\
&= \overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{MI}\bullet\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right) + IA\times IB\times\cos(\pi)\\
&= \overrightarrow{MI}^2 - (IA\times IB)\\
&= \overrightarrow{MI}^2 - \left(\frac{AB}{2}\times\frac{AB}{2}\right)\\
&= \overrightarrow{MI}^2 - \frac{AB^2}{4}
\end{aligned}$$

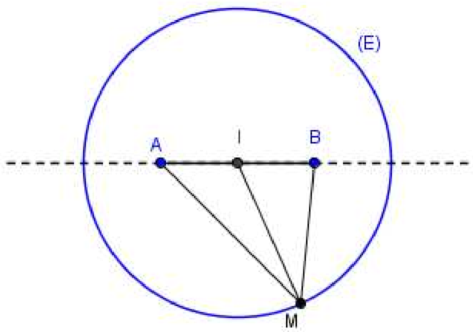
D’où : $\overrightarrow{MA}\bullet\overrightarrow{MB} = k \Leftrightarrow MI^2 - \frac{AB^2}{4} = k \Leftrightarrow IM^2 = k + \frac{AB^2}{4}$.

$$\overrightarrow{MA}\bullet\overrightarrow{MB} = k \quad\Leftrightarrow\quad IM^2 = k + \frac{AB^2}{4}$$

- Si $k+\frac{AB^2}{4} < 0$ alors (E) = ∅
- Si $k+\frac{AB^2}{4} = 0$ alors (E) = { I }
- Si $k+\frac{AB^2}{4} > 0$ alors $IM = \sqrt{k+\frac{AB^2}{4}}$; d'où (E) est le cercle de centre I et de rayon r = IM.

Exemple

Soient A et B deux points du plan tels que AB = 2. Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M du plan tels que : $\overrightarrow{MA}\bullet\overrightarrow{MB}=8$.



Soit I le milieu de [AB] ; $\overrightarrow{MA}\bullet\overrightarrow{MB}=k \iff IM^2 = k+\frac{AB^2}{4}$

$\overrightarrow{MA}\bullet\overrightarrow{MB}=8 \iff IM^2 = 9 \iff IM = 3$. D'où l'ensemble (E) des points M cherchés est le cercle de centre I et rayon r = 3.

5°) Distance d'un point à une droite

On démontre et admettra que : si ($\mathcal{D}$) est la droite d'équation : ax + by + c = 0 (a ; b) ≠ (0 ; 0) et si A(x_A;y_A) est un point du plan, alors la distance de A à ($\mathcal{D}$) est :

$$d(A\,;\mathcal{D}) = \frac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$