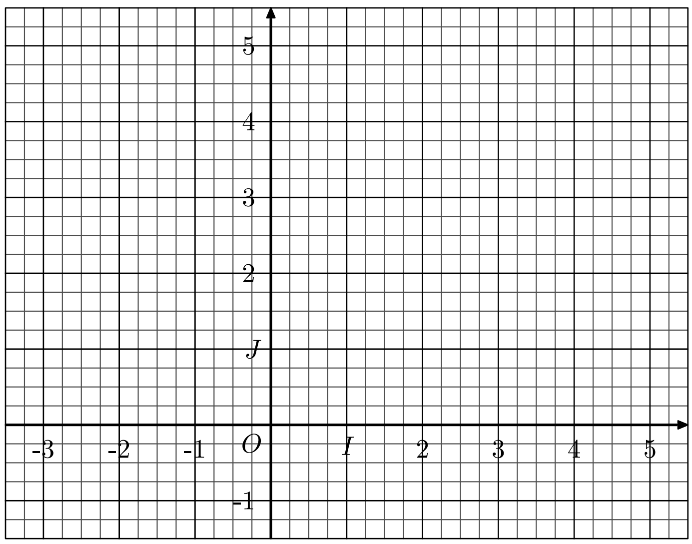
Première S/Produit scalaire

1. Introduction :

Exercice 6647

Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé.



On considère les points A, B et C définis par :
$A(-3\,;1)$; $B(4\,;-1)$; $C(1\,;3)$

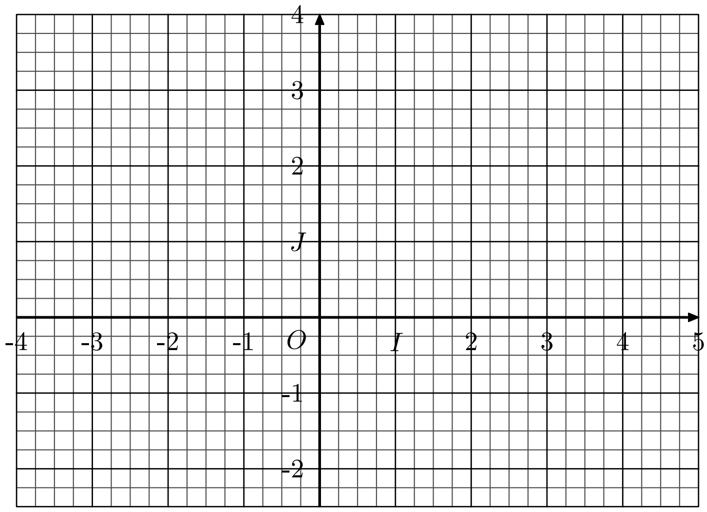
1. Déterminer les coordonnées du point I milieu du segment $[BC]$.

2. Soit J l'image du point A par la symétrie centrale de centre C.
   a. Donner une relation vectorielle vérifiée par les points A, C et J
   b. Déterminer les coordonnées du point J.

3. Déterminer la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$

Exercice 6646

On considère le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé.

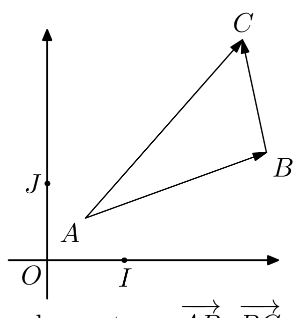


1. On rappelle la formule de la distance entre deux points :
   $$PQ = \sqrt{\left(x_Q - x_P\right)^2 + \left(y_Q - y_P\right)^2}$$
   On considère les trois points du plan A, B et C de coordonnées :
   $A(-3\,;2)$; $B(-2\,;-2)$; $C(2\,;-1)$
   a. Déterminer les distances AB, AC et BC.
   b. Etablir que le triangle ABC est un triangle rectangle.

2. Soit $\overrightarrow{u}\,(x\,;y)$ un vecteur, on définit la norme du vecteur $\overrightarrow{u}$ comme le nombre $\|\overrightarrow{u}\|$ défini par :
   $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$
   On considère les deux points E et F de coordonnées :
   $E(-1\,;2)$; $G(4\,;3)$
   et les deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de coordonnées :
   $\overrightarrow{u}\,(4\,;-1)$; $\overrightarrow{v}\,(1\,;2)$
   a. Déterminer les normes des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.
   b. Déterminer les coordonnées des points F et H vérifiant les deux égalités vectorielles :
   $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{u}$; $\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{v}$
   c. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ à l'aide des points E, F et G?
   d. Le triangle EFG est-il rectangle?

Exercice 2572

On considère le plan muni du repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$ et trois points A, B, C du plan.



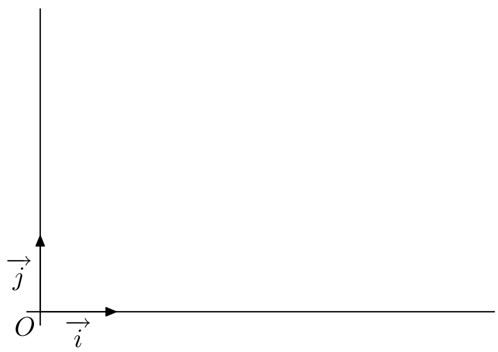
On ne connait pas les coordonnées des points A et B mais on note :
$\overrightarrow{AB}(x\,;y)$; $\overrightarrow{BC}(x'\,;y')$

1. Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$.

2. Exprimer la longueur de chacun des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$ en fonction de x, x', y, y'. Elles se notent respectivement $\|\overrightarrow{AB}\|$, $\|\overrightarrow{BC}\|$, $\|\overrightarrow{AC}\|$.

3. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que les droites (AB) et (BC) soient perpendiculaires.

Exercice réservé 3007



Faire un exercice demandant l'invariance du produit scalaire sur deux reperers de meme normes

et trouve la formule utilise en physique

2. Coordonnées et produit scalaire :

Exercice 3018

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$, on considère les deux vecteurs $\vec{u}\,(x\,;y)$ et $\vec{v}\,(x'\,;y')$.

- Le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est un nombre noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$ défini par :
  $\vec{u}\cdot\vec{v} = x{\cdot}x' + y{\cdot}y'$
- Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si, leur produit scalaire est nul.

Dans le plan muni d'un repère $\left(O\,;I\,;J\right)$ orthonormé, on considère les quatre points suivants :

$$A(-3\,;2)\quad;\quad B(-2\,;-2)\quad;\quad C(2\,;-1)\quad;\quad D(1\,;3)$$

1. Déterminer la valeur de $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$
2. Démontrer que le quadrilatère $ABCD$ est un rectangle.

Exercice 7781

On considère le plan muni d'un repère $\left(O\,;\,I\,;\,J\right)$.

1. On considère les trois points :
   $A(-5\,;1)\quad;\quad B(-3\,;-5)\quad;\quad C(-2\,;2)$.
   Montrer que le triangle ABC est rectangle en A.
2. On considère les trois points :
   $$D(-3\,;-2)\quad;\quad E(1\,;1)\quad;\quad F\Big(2\,;-\frac{26}{3}\Big).$$
   Montrer que le triangle DEF est rectangle. On précisera le sommet de l'angle droit.

Exercice 7786

Dans le plan muni d'un repère, on considère les deux droites (d) et (Δ) admettant pour équation :

$$(d):\ y = 3{\cdot}x - 1\quad;\quad(\Delta):\ 2{\cdot}x + 6{\cdot}y + 4 = 0$$

1. Démontrer que les droites (d) et (Δ) sont perpendiculaires.
2. Déterminer les coordonnées du point d'intersection des droites (d) et (Δ).

Exercice 7787

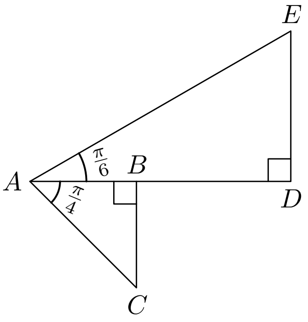
Dans le plan muni d'un repère $\left(O\,;I\,;J\right)$ orthonormé, on considère les trois points :

$$A(-2\,;1)\quad;\quad B(-8\,;-3)\quad;\quad D\Big(-3\,;\frac{5}{2}\Big)$$

1. Déterminer les coordonnées du point C tels que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme.
2. Montrer que le quadrilatère $ABCD$ est un rectangle.

Exercice 2574

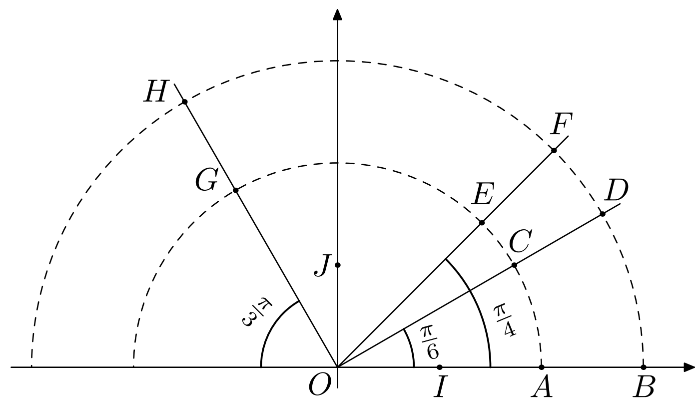
On considère la figure ci-dessous où : $AE = 4\,cm$ et $AC = 2\,cm$



1. On considère le repère orthonormé, orienté dans le sens direct, dont l'unité mesure $1\,cm$, et dont l'axe des abscisses est la droite (AD).
   a. Montrer que $E\big(2\sqrt{3}\,;2\big)$
   b. Déterminer les coordonnées des autres points de cette figure.
2. Déterminer la valeur des produits scalaires ci-dessous :
   a. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$ b. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}$ c. $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$
3. Comment s'appelle le point D relativement au point E? Comment s'appelle le point B relativement au point C?

Exercice 2573

On considère le repère orthonormé $\left(O\,;I\,;J\right)$ ci-dessous :



Deux demi-cercles sont tracés : $OA = 2\,cm$ et $OB = 3\,cm$

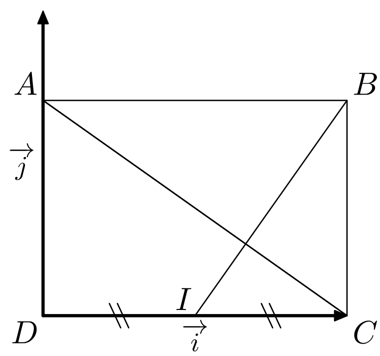
1. Déterminer les coordonnées des points figurants sur cette figure.
2. Déterminer la valeur des produits scalaires suivants :
   a. $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}$ b. $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OD}$
   c. $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OE}$ d. $\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{OG}$

Exercice réservé 3013

Soit a un nombre réel positif. On considère le rectangle $ABCD$ tel que :

$$AB = a\quad;\quad AD = \frac{\sqrt{2}}{2}a$$

On note I le milieu de $[CD]$. Une représentation est donnée ci-dessous :



On considère le plan munit d'un repère orthonormé $\left(D\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$ dans le sens direct où $\vec{i} = \overrightarrow{DC}$:

1. Déterminer les coordonnées des différents points de cette figure.

2. En déduire que les droites (AC) et (IB) sont perpendiculaires.

Question subsidiaire: reprendre la question 2. sans utiliser les coordonnées des points.

Exercice 8212

On considère le plan muni d'un repère $\big(O\,;I\,;J\big)$ orthonormal.

1. On considère les trois points $A(2\,;1)$, $B(1\,;-2)$ et $C(-1\,;2)$.
Justifier que le triangle ABC est rectangle en A.

2. On considère les trois points $D(-1\,;3)$, $E\Big(3\,;\dfrac{14}{3}\Big)$ et $F\Big(-\dfrac{1}{6}\,;1\Big)$.
Justifier que le triangle DEF est rectangle.

3. Produit scalaire et manipulations algébriques :

Exercice 3011

1. Pour tout vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$, établir l'égalité suivante:
$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=4\times\vec{u}\cdot\vec{v}$$

2. On considère le parallélogramme $ABCD$ dans le plan.
On note: $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$; $\vec{v}=\overrightarrow{BC}$

   a. Que représentent les vecteurs $\vec{u}+\vec{v}$ et $\vec{u}-\vec{v}$ pour le parallélogramme $ABCD$?

   b. A l'aide des questions précédentes, établir la proposition suivante:
   "Dans un parallélogramme, les diagonales sont de même longueur si, et seulement si, les côtés adjacents sont perpendiculaires."

Exercice 3016

On considère le plan muni d'un repère $\big(O\,;I\,;J\big)$ orthonormé et les trois points suivants:

$$A(2\,;3)\quad;\quad B(6\,;5)\quad;\quad C(0\,;6)$$

On note: $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$; $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$

1. a. Déterminer les normes $\big\|\vec{u}\big\|$ et $\big\|\vec{v}\big\|$.

   b. Déterminer la valeur de $\vec{u}\cdot\vec{v}$

2. a. Développer l'expression: $\big(3\times\vec{u}-2\times\vec{v}\big)^2$.

   b. En déduire la norme: $\big\|3\times\vec{u}-2\times\vec{v}\big\|$.

Exercice 2661

Soit ABC un triangle quelconque.

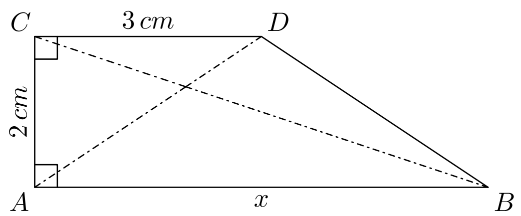
1. Démontrer que pour tout point M du plan, on a la relation:
$$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{AB}=0$$

2. En déduire que les hauteurs du triangle ABC sont concourantes en un point H.

4. Produit scalaire et colinéaire :

Exercice 8214

On considère le trapèze $ABCD$ représenté ci-dessous:

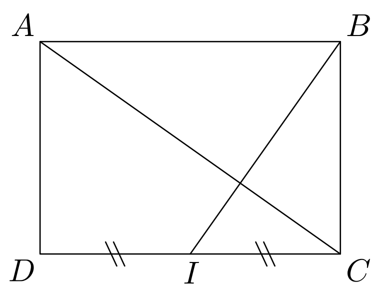


où: $AC=2\,cm$; $CD=3\,cm$

Déterminer la longueur x du segment $[AB]$ afin que les diagonales, $[AD]$ et $[BC]$, du trapèze $ABCD$ soient perpendiculaires.

Exercice 2665

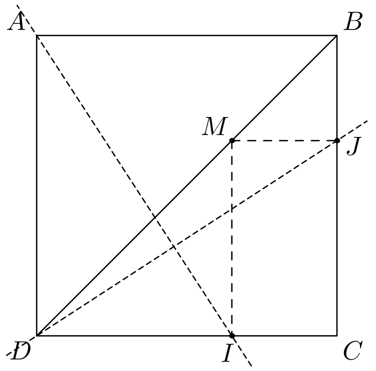
Soit a un nombre réel positif.
On considère le rectangle $ABCD$ tel que:
$$AB=a\quad;\quad AD=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot a$$
On note I le milieu de $[CD]$



En se servant uniquement des propriétés algébriques, démontrer que les droites (AC) et (BI) sont perpendiculaires.

Exercice 2673

On considère le carré $ABCD$ ci-dessous. M est un point appartenant à la diagonale $[BD]$.
On note I le projeté orthogonal de M sur (DC) et J le projeté orthogonal de M sur $[BC]$.

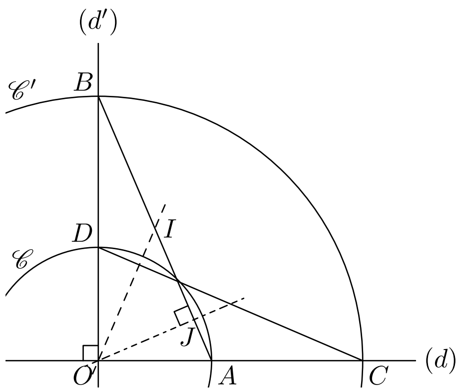


1. Etablir la relation suivante : $\overrightarrow{DI}\cdot\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{JC}$

2. En déduire que les droites (AI) et (DJ) sont orthogonales.

Exercice réservé 3087

On considère les deux cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ concentrique de centre O ; (d) et (d') sont perpendiculaires et sécantes en O. Soit A et C les intersections respectives de (d) avec les cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$; D et B les points d'intersection respectif avec la droite (d').

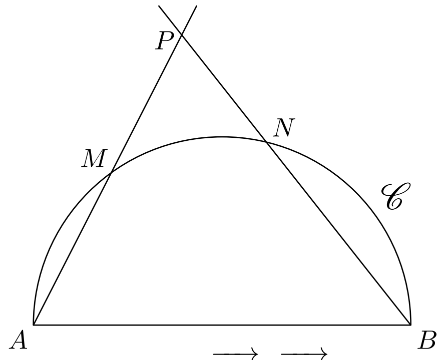


1. Soit I le milieu du segment $[AB]$:
   a. Justifier que le vecteur $\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)$ est colinéaire avec le vecteur $\overrightarrow{OI}$.
   b. Démontrer que les droites (DC) et (OI) sont perpendiculaires.

2. Soit J le projeté orthogonal du point O sur la droite (AB) :
   a. Montrer l'égalité suivante : $\left(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OC}\right)\cdot\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{0}$
   b. En déduire les caractéristiques du point d'intersection des droites (OJ) et (DC).

Exercice 3037

Dans le plan, on considère un demi-cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AB]$; soit M et N deux poins de $\mathscr{C}$ tels que les demi-droites $[AM)$ et $[BN)$ s'interceptent au point P :

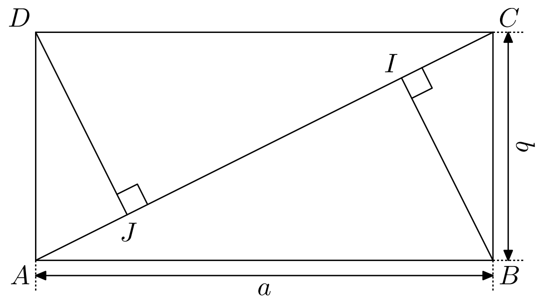


1. Déterminer la valeur de $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}$.

2. Etablir l'égalité suivante :
   $AB^2=AP\times AM+PB\times NB$

Exercice réservé 3081

On considère, dans le plan, le rectangle $ABCD$ de longueur a et de largeur b ; on note J et I les projetés orthogonaux sur la droite (AC) respectivement des points D et B :



1. a. Justifier l'égalité suivante : $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=-AC\times IJ$
   b. Justifier l'égalité suivante : $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=b^2-a^2$

2. En déduire l'expression de la longueur IJ en fonction de a et de b.

5. Produit scalaire et projection :

Exercice réservé 2596

On considère le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$ et les trois points suivants ainsi que leurs coordonnées dans ce repère :

$A(3\,;2)$; $B(5\,;-1)$; $C(-2\,;3)$

1. Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.

2. Donner les valeurs des produits scalaires suivants :
   $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AC}$

3. Calculer les distances AB, AC et BC.

4. Déterminer la mesure des 3 angles ABC.

Exercice 2593

On considère le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$:

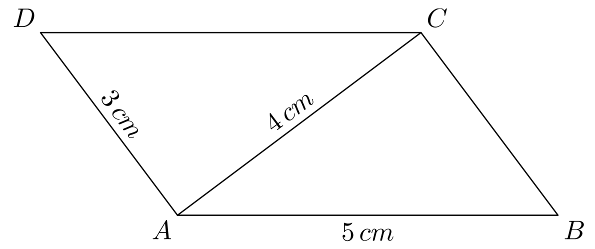
1. Soit A, B, C trois points du plan de coordonnées respective $(-2\,;3)$, $(1\,;-4)$ et $(0\,;-2)$
   a. Déterminer les valeurs de $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$, $\|\overrightarrow{BA}\|$ et $\|\overrightarrow{BC}\|$.
   b. En déduire la mesure de l'angle géométrique $\widehat{ABC}$ au centième près de degrés.
   c. A l'aide d'un dessin à main levé, donner une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{BC}\right)$.

2. Déterminer une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{DE}\,;\overrightarrow{DF}\right)$ où $D(3\,;5)$, $E(-1\,;0)$, $F(2\,;4)$ au centième de degré près.

Exercice réservé 3015

Dans le plan, on considère le parallélogramme $ABCD$ ayant pour les mesures suivantes :

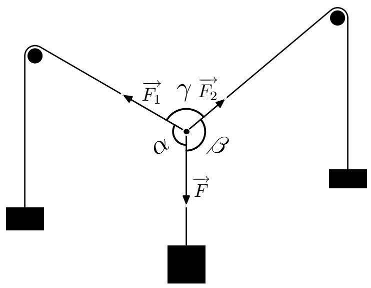
$$AB=5\,cm \quad ; \quad AC=4\,cm \quad ; \quad AD=3\,cm$$



1. On rappelle la formule du parallélograme :
   a. Développer l'expression : $\left(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\right)^2$.
   b. En déduire la valeur de $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$ en fonction de normes de vecteurs.
2. a. Développer l'expression : $\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\right)^2$.
   b. En déduire la mesure de la diagonale $[BD]$.

Exercice 3034

Le schéma ci-dessous représente un système de poulis à l'équilibre. Chacun des poids exercice sur le noeud proportionnellement à son poids.



On donne les informations suivantes :

$$\left\|\overrightarrow{F_1}\right\|=8\,N \quad ; \quad \left\|\overrightarrow{F_2}\right\|=6\,N \quad ; \quad \left\|\overrightarrow{F}\right\|=12\,N$$

On note R la résultante de toutes ces forces :

$$R=\overrightarrow{F}+\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}$$

1. Déterminer en fonction de $alpha$, β et γ les trois produits scalaires suivants :

$$\overrightarrow{R}\cdot\overrightarrow{F_1} \quad ; \quad \overrightarrow{R}\cdot\overrightarrow{F_2} \quad ; \quad \overrightarrow{R}\cdot\overrightarrow{F}$$

2. On suppose maintenant que ce système est en position d'équilibre, ainsi on a $\overrightarrow{R}=\overrightarrow{0}$
   a. Montrer que les mesures des angles vérifient le système suivant :
   $$\begin{cases} 4\cdot\cos\alpha + 3\cdot\cos\beta + 6 = 0 \\ 6\cdot\cos\alpha + 3\cdot\cos\gamma + 4 = 0 \\ 6\cdot\cos\beta + 4\cdot\cos\gamma + 3 = 0 \end{cases}$$
   b. En déduire les valeurs de α, β, γ pour la position d'équilibre.

Exercice 7849

On considère le plan muni du repère $\left(O\,;\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{v}\right)$ orthonormé et les points A, B, C de coordonnées :

$$A(1\,;1) \quad ; \quad B(4\,;2) \quad ; \quad C(3\,;-1)$$

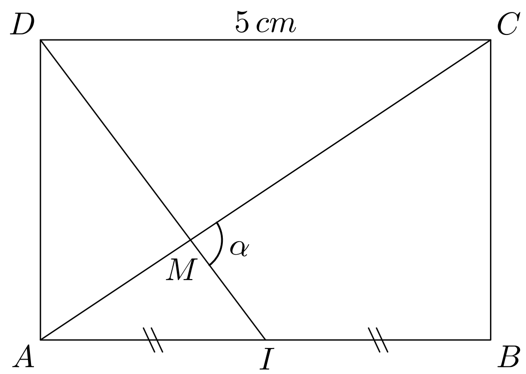
Déterminer la mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{BC}\right)$ au dixième de degrés près.

Exercice réservé 3014

Dans le plan, on considère le rectangle $ABCD$ tel que :

$$AB=5\,cm \quad ; \quad BC=\frac{2}{3}\cdot AB$$

I est le milieu du segment $[AB]$; les droites (AC) et (ID) s'interceptent au point M.



1. En exprimant les vecteurs à l'aide de $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AB}$, déterminer la valeur du produit scalaire $\overrightarrow{ID}\cdot\overrightarrow{AC}$
2. a. Déterminer les longueurs des segments $[DI]$ et $[AC]$.
   b. En déduire la mesure de l'angle $\widehat{IMC}$ au dixième de degré près.

6. Formule d'Al-Kashi :

Exercice 2590

On considère le triangle ABC dont les mesures sont :

$$AB=5{,}3\,cm \quad ; \quad AC=3{,}7\,cm \quad ; \quad BC=7\,cm$$

Les formules d'Al-Kashi appliquées à ce triangle donne :

- $AB^2=AC^2+BC^2-2\times AC\times BC\times\cos\widehat{ACB}$
- $AC^2=AB^2+BC^2-2\times AB\times BC\times\cos\widehat{ABC}$
- $BC^2=AB^2+AC^2-2\times AB\times AC\times\cos\widehat{BAC}$

Déterminer la mesure, au dixième de degrés près, des angles du triangle ABC.

Exercice 6706

Déterminer la mesure, au dixième de degrés près, des angles du triangle ABC ayant les mesures suivantes :

$$AB=6{,}4\,cm \quad ; \quad AC=4{,}8\,cm \quad ; \quad BC=8\,cm$$

Exercice 7850

On considère le triangle ABC dont les mesures sont :

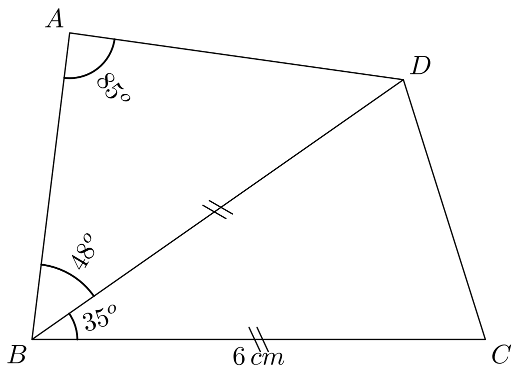
$$AB=5{,}5\,cm \quad ; \quad AC=6{,}2\,cm \quad ; \quad BC=4{,}7\,cm$$

Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ au dixième de degrés près

7. Formule des sinus :

Exercice 2674

On considère le quadrilatère $ABCD$ représenté ci-dessous :

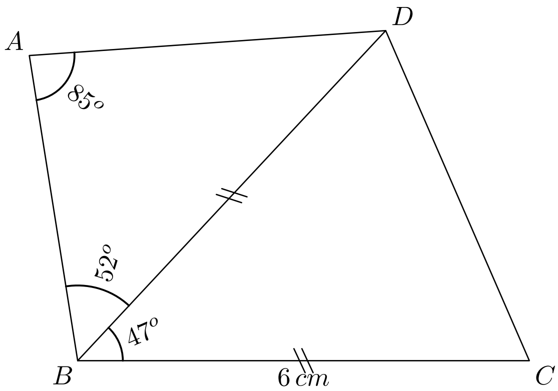


1. Les formules d'AL-Kashi donne la formule :
$$DC^2 = BD^2 + BC^2 - 2{\times}BD{\times}BC{\times}\cos\widehat{DBC}$$
En déduire la mesure de la longueur DC arrondie au millimètre près.

2. La formule des sinus exprimés dans le triangle ABD s'exprime par :
$$\frac{\sin\widehat{DBA}}{AD} = \frac{\sin\widehat{ADB}}{AB} = \frac{\sin\widehat{DAB}}{DB}$$
En déduire les mesures des longueurs AB et AD arrondie au millimètre près.

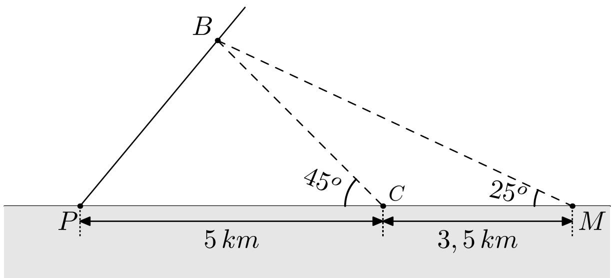
Exercice 6707

Déterminer les mesures des quatre côtés du quadrilatère $ABCD$ au millimètre près.



Exercice 2664

Un bateau B rejoint le port P en ligne droite ; sur le bord de la rive, Marc et Cléa regarde le bateau rentré au port.



1. a. Déterminer les mesures des angles du triangle BCM.

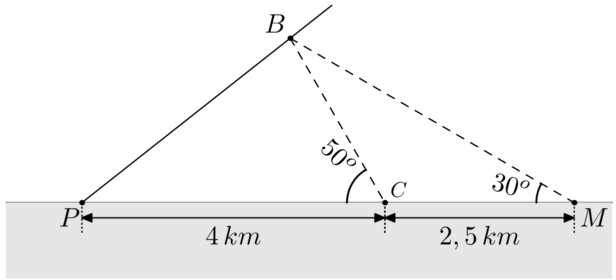
   b. La formule des sinus s'exprime dans le triangle MBC par :
$$\frac{\sin\widehat{BCM}}{BM} = \frac{\sin\widehat{CMB}}{CB} = \frac{\sin\widehat{MBC}}{MC}$$
   En déduire la longueur BC arrondie à l'hectomètre près.

2. Dans le triangle CBP, les formules d'Al-Kashi s'exprime par :
   - $PC^2 = PB^2 + BC^2 - 2{\times}PB{\times}BC{\times}\cos\widehat{PBC}$
   - $PB^2 = PC^2 + BC^2 - 2{\times}PC{\times}BC{\times}\cos\widehat{PCB}$
   - $CB^2 = CP^2 + PB^2 - 2{\times}CP{\times}PB{\times}\cos\widehat{CPB}$

   En déduire la distance séparant le bateau du port arrondie à l'hectomètre près.

Exercice réservé 6710

Un bateau B rejoint le port P en ligne droite ; sur le bord de la rive, Marc et Cléa regarde le bateau rentré au port.



Les longueurs seront arrondies au centaine de mètres près.

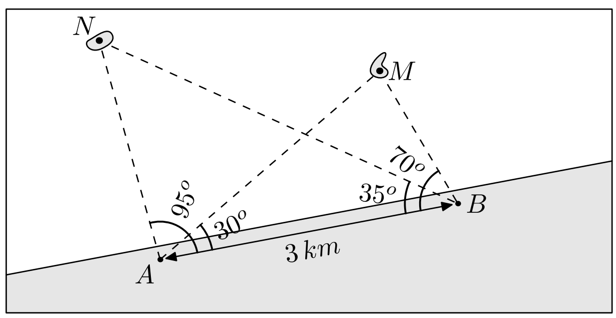
1. Dans le triangle MCB, déterminer la longueur BC.
2. En déduire la distance séparant le bateau du port.

Exercice 3084

Deux observateurs souhaitent mesurer la distance séparant les deux phares présents près de leur côte. Pour cela, ils se séparent de $3\,km$ et effectuent les mesures d'angles suivants :

$\widehat{MAB} = 30^o$; $\widehat{MBA} = 70^o$; $\widehat{NAB} = 95^o$; $\widehat{ABN} = 35^o$

Le schéma ci-dessous représente cette situation :



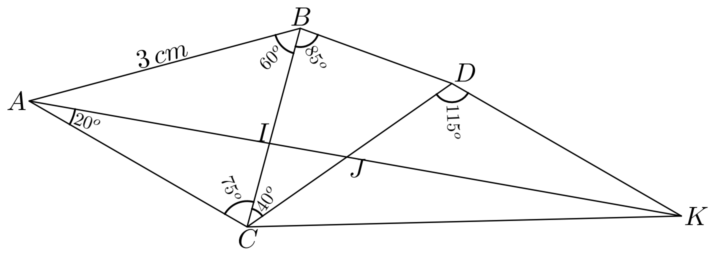
1. a. Déterminer la longueur du segment $[AN]$ *(au mètre près)*.

   b. Déterminer la longueur du segment $[AM]$ *(au mètre près)*.

2. Déterminer la longueur du segment $[MN]$ *(à l'hectomètre près)*.

Exercice réservé 3041

On considère la configuration ci-dessous où la droite (AK) intercepte les segments $[BC]$ et $[DC]$ respectivement en I et J :



Déterminer, au millimètre près, la longueur AK. *(les résultats intermédiaires doivent avoir une précision de 10^{-3} cm)*

8. Formule de la médiane :

Exercice 6807

On rappelle la formule de la médiane :

> Soient A et B deux points du plan et I le milieu du segment $[AB]$. Pour tout point M du plan, on a la relation :
> $$AM^2 + BM^2 = \frac{1}{2}\cdot AB^2 + 2\cdot MI^2$$

On considère le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$ et les trois points A, B et C de coordonnées respectives :
$A(-2\,;-3)$; $B(-1\,;2)$; $C(3\,;1)$

1. Déterminer les mesures AB, AC et BC.
2. a. On note I le milieu du segment $[AB]$. Déterminer la mesure de la médiane dans le triangle ABC issue du sommet C.
   b. On note J le milieu du segment $[AC]$. Déterminer la mesure de la médiane dans le triangle ABC issue du sommet B.

Exercice réservé 2608

Soit A et B deux points du plan tel que $AB=5\,cm$

1. On utilisera la relation suivante :
   $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2$
   Déterminer l'ensemble des points M vérifiant la relation suivante :
   a. $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 0$ b. $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 5$
   c. $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = -9$ d. $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = -25$
   e. $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = -30$
2. On utilisera la relation suivante :
   $MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{AB}$
   Déterminer l'ensemble des points M vérifiant la relation suivante :
   a. $MA^2 - MB^2 = 0$ b. $MA^2 - MB^2 = 10$
   c. $MA^2 - MB^2 = -30$
3. On utilisera la relation suivante :
   $$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$$
   Déterminer l'ensemble des points M vérifiant la relation suivante :
   a. $MA^2 + MB^2 = 22{,}5$ b. $MA^2 + MB^2 = 12{,}5$
   c. $MA^2 + MB^2 = 7$

Exercice 2663

On considère un triangle ABC rectangle en A ayant les mesures suivantes : $AB=6$; $AC=3$

On note I le milieu du segment $[AB]$ et J le milieu de $[IC]$.

On s'intéresse à l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M vérifiant la relation : $MA^2+MB^2+2\cdot MC^2=72$

1

1^{er} **méthode :**

1. Montrer que tous points M vérifient la relation :
   $$MA^2+MB^2+2\times MC^2 = 4\cdot MJ^2+JA^2+JB^2+2\times JC^2$$
2. En utilisant par deux fois le théorème de la médiane, démontrer la relation suivante :
   $$M\in\mathcal{E} \iff 4\times MJ^2+\frac{AB^2}{2}+IC^2=72$$
3. En déduire la nature de l'ensemble $\mathcal{E}$.

$2^{\text{ème}}$ **méthode :**

On munit le plan du repère $\Big(A\,;\frac{1}{6}\cdot\overrightarrow{AB}\,;\frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{AC}\Big)$

1. Déterminer les coordonnées des points A, B, C dans ce repère.
2. En notant $(x\,;y)$ les coordonnées du point M, déterminer une équation de $\mathcal{E}$ dans ce repère.
3. En déduire la nature de l'ensemble $\mathcal{E}$.

Exercice 2609

On considère le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé et les deux points du plan suivants :
$A(-3\,;2)$; $B(3\,;-6)$

1. On désignera par M le point de coordonnées $(x\,;y)$:
   a. Déterminer les coordonnées du point I milieu de $[AB]$.
   b. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{IM}$ et $\overrightarrow{AB}$.
   c. Déterminer la longueur AB.
2. a. Déterminer l'équation cartésienne de l'ensemble des points vérifiants la relation :
   $MA^2 - MB^2 = 40$

(b.) Donner la nature et les éléments caractéristiques des points M vérifiant cette relation.

3. (a.) Déterminer l'équation de l'ensemble des points vérifiants la relation :

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=34$$

(b.) Donner la nature et les éléments caractéristiques des points M vérifiant cette relation.

4. (a.) Déterminer l'équation de l'ensemble des points vérifiants la relation :

$$MA^2+MB^2=150$$

(b.) Donner la nature et les éléments caractéristiques des points M vérifiant cette relation.

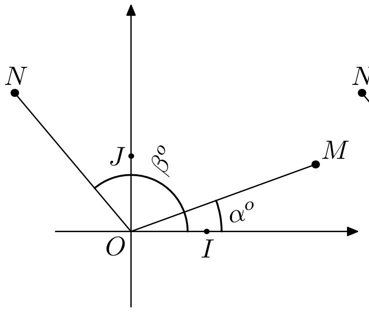
9. Formules d'addition :

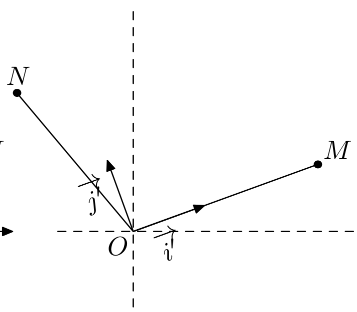
Exercice 2575

On considère deux points M et N dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$; on repère ces points par leurs coordonnées polaires :

$$\begin{cases} OM = \rho \\ \left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OM}\right) = \alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} ON' = \rho' \\ \left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{ON}\right) = \beta \end{cases}$$

La figure de gauche représente cette situation.





La figure de droite représente les mêmes points M et N dans le repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i'}\,;\vec{j'}\right)$.

Dans cet exercice, nous allons exprimer le produit scalaire $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}$ dans ces deux repères :

1. Dans le repère $\left(O\,;I\,;J\right)$:

(a.) Donner les coordonnées cartésiennes associées.

(b.) En déduire la valeur du produit scalaire $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}$.

2. Dans le repère $\left(O\,;\vec{i'}\,;\vec{j'}\right)$:

(a.) Déterminer les coordonnées polaires des points M et de N en fonction de α, β, ρ et ρ' dans le repère $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$.

(b.) Donner les coordonnées cartésiennes des points M et N dans ce repère.

(c.) En déduire la valeur du produit scalaire $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}$.

3. Justifier l'égalité suivante :

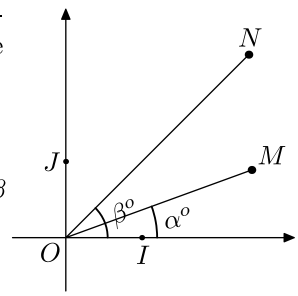
$$\cos\left(\beta-\alpha\right) = \cos\beta\cdot\cos\alpha+\sin\alpha\cdot\sin\beta$$

Exercice 6808

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;I\,;J\right)$, on considère les points M et N tel que :

$$\|\overrightarrow{OM}\| = a \quad ; \quad \|\overrightarrow{ON}\| = b$$

$$\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OM}\right)=\alpha \quad ; \quad \left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{ON}\right)=\beta$$



1. (a.) Déterminer les coordonnées des points M et N.

(b.) Donner une expression du produit scalaire $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}$

2. (a.) Donner la mesure de l'angle orienté : $\left(\overrightarrow{OM}\,;\overrightarrow{ON}\right)$

(b.) Donner une autre expression de $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}$.

3. En déduire l'égalité :

$$\cos\left(\beta-\alpha\right) = \cos\beta\cdot\cos\alpha+\sin\beta\cdot\sin\alpha$$

Exercice 2616

Déterminer une simplification des expressions suivantes :

1. $\cos 2x\cdot\cos x - \sin 2x\cdot\sin x$

2. $\sin 3x\cdot\cos 2x - \sin 2x\cdot\cos 3x$

Exercice 2614

1. En remarquant l'égalité $\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}$, déterminer les valeurs de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

2. Déterminer les valeurs de : $\cos\dfrac{7\pi}{12}$; $\sin\dfrac{7\pi}{12}$

Exercice réservé 2615

Montrer la relation suivante :

$$\sin(a+b)\cdot\cos(a-b) = \sin a\cdot\cos a+\cos b\cdot\sin b$$

Exercice réservé 3089

1. Simplifier l'expression suivante :

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

2. Etablir l'égalité suivante :

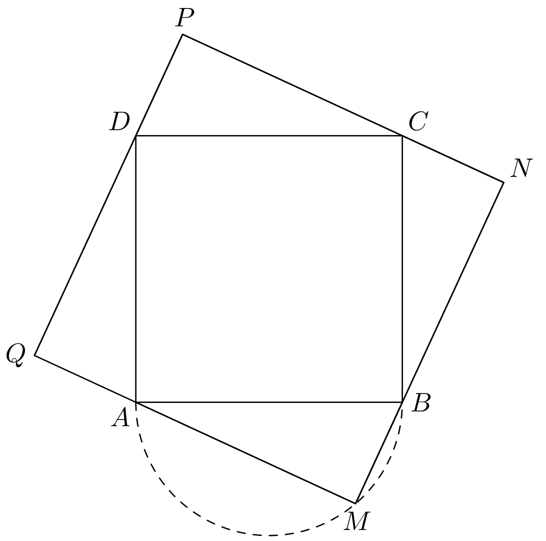
$$\frac{\sin 5x}{\sin 2x}+\frac{\sin 2x}{\sin x}=\frac{\left(\sin 3x\right)^2}{\sin(2x)\cdot\sin(x)}$$

3. Résoudre l'équation suivante :

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos(2x)+\frac{1}{2}\cdot\sin(2x)=\cos\frac{\pi}{7}$$

Exercice 4722

On considère le carré $ABCD$. Soit M un point appartenant au demi-cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AB]$ se situant hors du carré $ABCD$.
On considère les points N, P et Q tels que le quadrilatère $MNPQ$ soit un carré dont les points A, B, C, D appartiennent respectivement aux droites (MQ), (MN), (NP), (PQ).



1. Montrer que les triangles AMB, ADQ, CDP et BCN sont isométriques.

2. On note $\mathscr{A}$ l'aire du carré $ABCD$, $\mathscr{A}'$ l'aire du carré $MNPQ$ et α la mesure géométrique de l'angle $\widehat{BAM}$.
Montrer que l'égalité : $\dfrac{\mathcal{A}}{\mathcal{A}'} = 1+\sin(2\alpha)$

3. Pour quelle valeur de α, l'aire $\mathcal{A}'$ est le double de l'aire $\mathcal{A}$.

10. Formules de duplication :

Exercice 2613

1. Etablir la relation suivante : $\left(\cos\dfrac{\pi}{8}\right)^2 = \dfrac{1}{4}\cdot\left(\sqrt{2}+2\right)$

2. En déduire la valeur de $\cos\dfrac{\pi}{8}$.

3. Etablir la relation : $\sin\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$

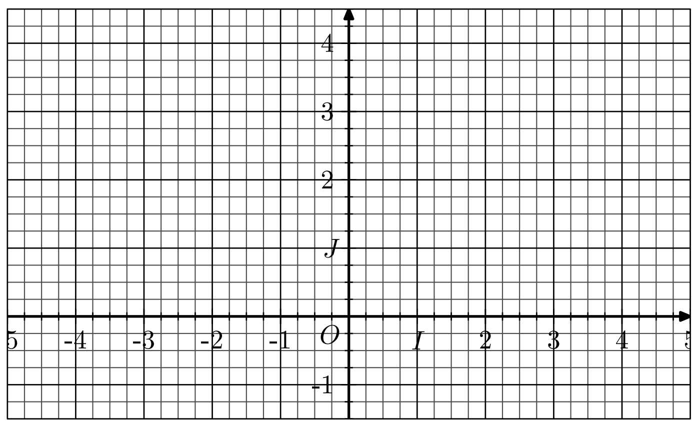
11. Equations cartésiennes des droites :

Exercice 2591

On considère le plan munit d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé.

1. Dans chaque cas, déterminer une équation cartésienne de la droite perpendiculaire au vecteur $\vec{u}$ et passant par le point A :
   a. $\vec{u} = (2\,;3)$ et $A(1\,;0)$
   b. $\vec{u} = (-1\,;1)$ et $A(-2\,;1)$

2. Tracer la représentation de chacune de ces droites dans le repère ci-dessous ainsi qu'un représentant de chaque vecteur $\vec{u}$ au point A correspondant :



Exercice 3036

Dans le plan $(O\,;\,I\,;\,J)$, on considère les points A, B, C, D de coordonnées :

$$A(-1\,;-1) \quad ; \quad B(2\,;-4) \quad ; \quad C\left(\frac{22}{5}\,;\frac{4}{5}\right) \quad ; \quad D\left(\frac{1}{5}\,;\frac{7}{5}\right)$$

1. a. Soit K le milieu du segment $[AB]$. On considère l'ensemble des points $M(x\,;y)$ du plan qui vérifie la relation : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{KM} = 0$
Déterminer une équation vérifiée par les coordonnées $(x\,;y)$ du point M.

b. En déduire une équation cartésienne de la médiatrice (d) du segment $[AB]$.

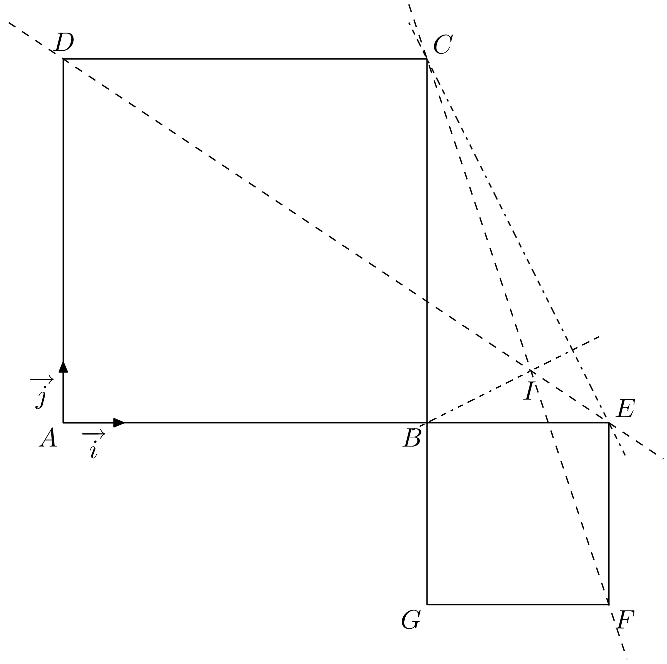
2. a. Déterminer les coordonnées d'un vecteur orthogonal à la droite (CD).

b. En déduire l'équation de la droite (CD).

3. Déterminer les coordonnées du point d'intersection des droites (d) et (d').

Exercice réservé 3082

Dans le plan, on considère les deux carrés $ABCD$ et $BEFG$ représentés ci-dessous :



On munit le plan du repère orthonormée $\left(A\,;\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{j}\right)$ où :

$\|\overrightarrow{AB}\|=6 \quad ; \quad \|\overrightarrow{BE}\|=3$

1. a. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{CF}$.

b. En déduire les équations cartésiennes des droites (DE) et (CF) dans le plan $\left(A\,;\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{j}\right)$.

2. Déterminer les coordonnées du point I.

3. Justifier que les droites (BI) et (CE) sont perpendiculaires.

12. Equations cartésiennes des cercles :

Exercice 3083

On considère les trois équations cartésiennes suivantes :

a. $x^2+y^2+6x-4y+9=0$

b. $x^2+y^2-2x+6y+10=0$

c. $x^2+y^2+4x-4y+9=0$

1. Ecrire chacune des équations ci-dessus sous la forme :
$\left(x-a\right)^2+\left(y-b\right)^2=c$
où a, b, c sont des nombres réels à déterminer.

2. Pour chaque équation, en déduire la nature de l'ensemble des points défini par cette équation et en préciser les élèments caractéristiques

Exercice 2592

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$ dont l'unité est le centimètre.

1. On considère le cercle $\mathscr{C}$ de centre I et de rayon r. Dans chaque cas présenté ci-dessous, déterminer l'équation du cercle :

a. $I(1\,;2)$ et $r{=}3\,cm$

b. $I(-3\,;1)$ et $r{=}5\,cm$

2. On considère le cercle $\mathscr{C}'$ dont les points A et B sont diamétralement opposés. Déterminer l'équation du cercle dans chacun des cas suivants :

a. $A(-2\,;0)$ et $B(4\,;0)$

b. $A(2\,;-3)$ et $B(-1\,;2)$

Exercice réservé 3035

Dans le plan $\left(O\,;I\,;J\right)$, on considère les points A, B, C, D de coordonnées :

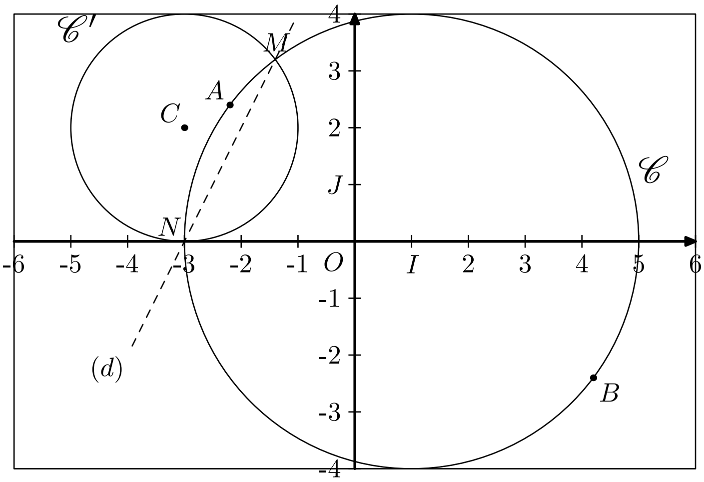
$A(-1\,;-1) \quad ; \quad B(2\,;-4) \quad ; \quad C\left(\frac{22}{5}\,;\frac{4}{5}\right) \quad ; \quad D\left(\frac{1}{5}\,;\frac{7}{5}\right)$

1. Déterminer s'il existe des réels a, b et c tels que l'équation :
$x^2+y^2-2{\cdot}a{\cdot}x-2{\cdot}b{\cdot}y+c=0$
soit vérifiée par les coordonnées des quatres points A, B, C et D.

2. Que peut-on dire des points A, B, C et D?

Exercice réservé 3088

Dans le plan muni d'un repère $\left(O\,;I\,;J\right)$, on considère les points $A\left(-\frac{11}{5}\,;\frac{12}{5}\right)$, $B\left(\frac{21}{5}\,;-\frac{12}{5}\right)$, $C(-3\,;2)$; les points A et B sont diamétralement opposés dans le cercle $\mathscr{C}$; le cercle $\mathscr{C}'$ a pour centre C et a pour rayon 2. On note M et N les deux points d'intersection des cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.



1. Déterminer les équations des cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.
2. Déterminer les coordonnées des points M et N.
3. En déduire l'équation cartésienne de la droite (d).

13. Equations cartésiennes :

Exercice 2660

On considère le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$ et l'ensemble des points $\mathcal{E}$ défini par l'équation cartésienne :

$$(E) :\ x^2+y^2-4{\cdot}x+6{\cdot}y+3=0$$

1. a. Ecrire l'équation (E) sous la forme :
   $(x-a)^2+(y-b)^2=c$

   b. Justifier que l'ensemble $\mathcal{E}$ est un cercle $\mathscr{C}$ dont on précisera les caractéristiques.

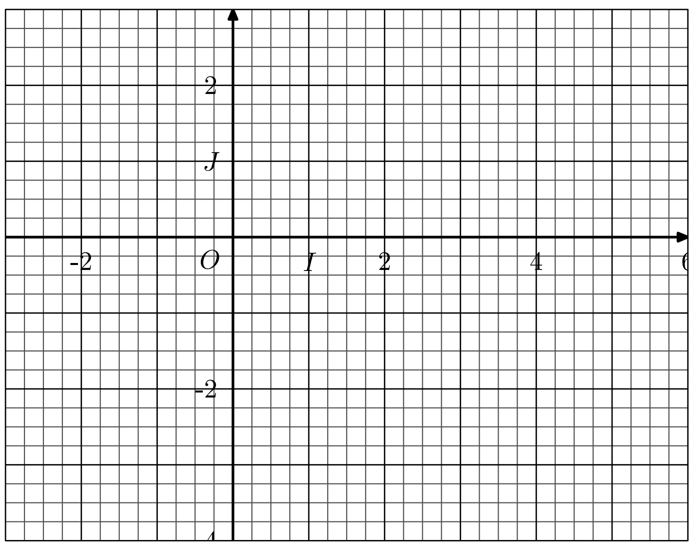
2. a. Montrer que le point $A(3\,;0)$ est un point du cercle $\mathscr{C}$.

   b. Déterminer une équation cartésienne de la tangente (d) au cercle $\mathscr{C}$ passant par le point A.

3. Après avoir montré que le point $B(-1\,;-2)$ est un point du cercle, donner une équation cartésienne de la droite (d') tangente au cercle $\mathscr{C}$ au point B.

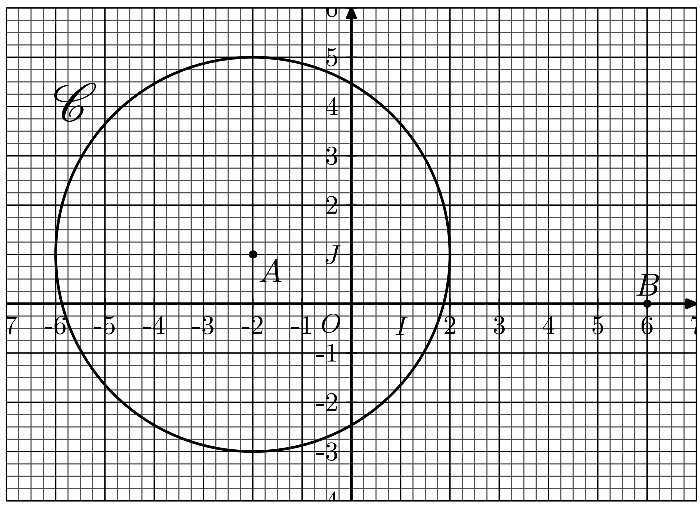
4. Déterminer les coordonnées du point M intersection des droites (d) et (d').

5. Tracer dans le repère ci-dessous le cercle $\mathscr{C}$ *(ou une partie)* et ses deux tangentes.



Exercice réservé 3039

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$, on considère le cercle $\mathscr{C}$ de centre $A(-2\,;1)$ et de rayon 4 ; le point B a pour coordonnée $(6\,;0)$:



Le but de cet exercice est de déterminer l'équation des deux tangentes, (d) et (d'), au cercle $\mathscr{C}$ passant par le point B :

1. a. Déterminer l'équation du cercle $\mathscr{C}$.

   b. Déterminer l'équation du cercle de diamètre $[AB]$.

2. Déterminer les coordonnées des points de contact des droites (d) et (d') avec le cercle $\mathscr{C}$.

3. En déduire que les droites (d) et (d') admettent les équations cartésiennes :
   $35{\cdot}x-84{\cdot}y-210=0 \quad ; \quad -21{\cdot}x-28{\cdot}y+126=0$

4. Déterminer les coordonnées, pour chacune des droites, de leurs points d'abscisse 3 ; effectuer le tracé de ces droites.

Exercice 2597

On considère le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$.

1. a. Soit (d) la droite ayant pour vecteur directeur $(1\,;2)$ et passant par le point $A(0\,;-1)$.

Déterminer l'équation cartésienne de cette droite.

b. Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre $A(1;1)$ et de rayon 3. Déterminer l'équation cartésienne de ce cercle.

2. Dans cette question, on s'intéresse au point d'intersection de (d) et de $\mathscr{C}$.

a. Justifier que si $M(x;y)$ est un point d'intersection de la droite et du cercle alors ses coordonnées vérifient le système d'équation :

$$\begin{cases} x^2+y^2-2{\cdot}x-2{\cdot}y-7=0 \\ -2{\cdot}x+y+1=0 \end{cases}$$

b. Par substitution, résoudre ce système d'équation.

Exercice 3040

On considère le plan muni d'un repère $(O;I;J)$; les points A et B ont pour coordonnées respectives $(2;-3)$ et $(-1;1)$; on note I le milieu du segment $[AB]$; M représente un point quelconque du plan et ses coordonnées sont notées $(x;y)$:

1. On s'intéresse au lieu géométrique $\mathcal{E}$ défini par la relation : $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=2$

a. Déterminer une relation entre x et y caractérisant l'ensemble $\mathcal{E}$.

b. Vérifier que le point de coordonnée $\left(2;\sqrt{6}-1\right)$ appartient à l'ensemble $\mathcal{E}$.

c. Quel est la nature géométrique de $\mathcal{E}$? Donner ses éléments caractéristiques.

2. On s'intéresse au lieu géométrique $\mathcal{F}$ défini par la relation : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IM}=-7{,}5$

a. Déterminer une relation sur les coordonnées des points M appartenant à l'ensemble $\mathcal{F}$.

b. Quel est la nature géométrique de $\mathcal{F}$? Donner les éléments caractétristiques de $\mathcal{F}$.

255. Exercices non-classés :

Exercice 2662

Soit ABC un triangle rectangle en A. On note H le pied de la hauteur issue de A. I, J, K sont les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[AC]$, $[BC]$.

1. Etablir la relation suivante : $HA^2=HB\times HC$

2. a. Etablir la relation vectorielle suivante : $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AJ}=\overrightarrow{AK}$

b. Démontrer que les droites (HI) et (HJ) sont perpendiculaires.

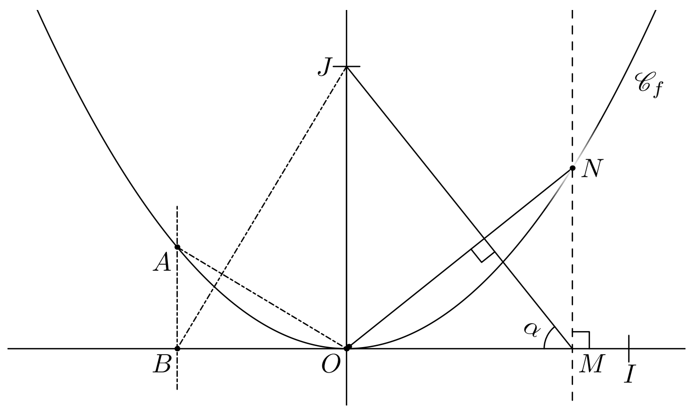
Exercice réservé 2869

voir la relation avec le barycentre lorsqu'on demande de résoudre une équation de ce style :

$$|\overrightarrow{MA}-3\times\overrightarrow{MB}|=\overrightarrow{AB}$$

Exercice réservé 2957

Dans le plan muni d'un repère $(O;I;J)$, on considère la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction carré.



1. Soit M un point de l'axe des abscisses ayant pour abscisse x ; N est le point d'abscisse x appartenant à la perpendiculaire à la droite (JM) passant par le point O. Le but de cette question est de montrer que le point N appartient à la courbe $\mathscr{C}_f$:

a. Donner une relation trigonométrique entre x et α.

b. Exprimer la longueur MN en fonction de x et α.

c. En déduire que le point N appartient à la courbe $\mathscr{C}_f$

2. Soit A un point de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse x ; on note B le projeté orthogonal du point A sur l'axe des abscisses.

a. Déterminer la valeur de : $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BJ}$

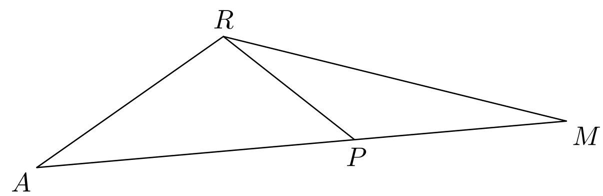
b. Que peut-on dire des droites (OA) et (BJ)?

Exercice réservé 3073

a faire avec le dessin dans repertoire

Exercice 6687

On considère la configuration ci-dessous :



1. Ecrire les trois formules d'Al-Kashi dans le triangle ARP.

2. Ecrire la formule de l'égalité des sinus dans le triangle RPM

