Ch. 2 : Les ensembles des nombres

1. Les nombres entiers

$\mathbb{N} = \{0,1,2,3,4,5,...\} =$ ensemble des entiers naturels

$\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1,2,3,4,5,...\} =$ ensemble des entiers naturels non nuls

$\mathbb{Z} = \{...-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,...\} =$ ensemble des entiers (relatifs)

$\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\} = \{...-5,-4,-3,-2,-1,1,2,3,4,5,...\} =$ ensemble des entiers (relatifs) non nuls

$\mathbb{Z}_+ = \{0,1,2,3,4,5,...\} =$ ensemble des entiers relatifs positifs

$\mathbb{Z}_- = \{0,-1,-2,-3,-4,-5,...\} =$ ensemble des entiers relatifs négatifs

$\mathbb{Z}_+^* = \{1,2,3,4,5,...\} =$ ensemble des entiers relatifs strictement positifs

$\mathbb{Z}_-^* = \{-1,-2,-3,-4,-5,...\} =$ ensemble des entiers relatifs strictement négatifs

Remarques.

- 0 est à la fois positif et négatif. C'est le seul nombre qui jouit de cette propriété.

$$\mathbb{Z}_+ \cap \mathbb{Z}_- = \{0\} \tag{1.1}$$

- Les entiers (relatifs) sont munis du signe + ou du signe –. On a :

$$\mathbb{Z}_+ \cup \mathbb{Z}_- = \mathbb{Z} \tag{1.2}$$

- L'ensemble des entiers relatifs positifs est égal à l'ensemble des entiers naturels.

$$\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \tag{1.3}$$

- L'ensemble des entiers naturels est inclus dans l'ensemble des entiers :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \tag{1.4}$$

- On veillera à ne pas confondre les termes de ***chiffre*** et d'***entier*** : seuls les dix entiers 0,1,2,3,4,5,6,7,8 et 9 sont appelés ***chiffres***. 12 est donc un nombre entier, mais pas un chiffre.

2. Les nombres décimaux

Un nombre décimal est un nombre qui peut s'écrire à l'aide d'un nombre fini de chiffres derrière la virgule. Par exemple : 123,45 et –5,004 sont des nombres décimaux, mais $1/3 = 0,33333...$ n'est pas un nombre décimal car dans son développement décimal il y a une infinité de chiffres 3 derrière la virgule. Pour comprendre la définition mathématique exacte de l'ensemble des nombres décimaux, remarquons que :

$$123,45 = \frac{12345}{100} = \frac{12345}{10^2} \quad \text{et} \quad -5,004 = \frac{-5004}{1000} = \frac{-5004}{10^3}$$

$\mathbb{D} = \left\{ \frac{n}{10^m} \,/\, n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N} \right\}$ est l'ensemble des nombres décimaux

$\mathbb{D}^* = \mathbb{D} \setminus \{0\} = \left\{ \dfrac{n}{10^m} \;/\; n \in \mathbb{Z}^*, m \in \mathbb{N} \right\}$ est l'ensemble des nombres décimaux non nuls

$\mathbb{D}_+ = \left\{ \dfrac{n}{10^m} \;/\; n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N} \right\}$ est l'ensemble des nombres décimaux positifs

$\mathbb{D}_- = \left\{ \dfrac{n}{10^m} \;/\; n \in \mathbb{Z}_-, m \in \mathbb{N} \right\}$ est l'ensemble des nombres décimaux négatifs

Exemples.

- $\dfrac{1}{4} = 0,25 = \dfrac{25}{100} = \dfrac{25}{10^2} \in \mathbb{D}$
- $-\dfrac{3}{200} = -\dfrac{15}{1000} = -\dfrac{15}{10^3} \in \mathbb{D}$
- $9 = \dfrac{9}{1} = \dfrac{9}{10^0} \in \mathbb{D}$

Remarques.

- Le dernier exemple ci-dessus est important car il montre que tout entier est aussi un nombre décimal. En effet, si $a \in \mathbb{Z}$ alors :

$$a = \frac{a}{1} = \frac{a}{10^0} \in \mathbb{D}$$

car le numérateur $a \in \mathbb{Z}$ et le dénominateur est 10^0 avec l'exposant $0 \in \mathbb{N}$.

Donc :
$$\mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \tag{1.5}$$

- Un nombre décimal peut toujours s'écrire avec un nombre fini de chiffres non nuls derrière la virgule.

3. Les nombres rationnels

On a vu que 1/3 n'est pas un nombre décimal puisque dans son développement décimal, il y a une infinité de chiffres 3 derrière la virgule. On va donc agrandir l'ensemble des nombres rencontrés jusqu'à présent par les ***nombres rationnels*** (du latin : ratio = fraction). Chaque nombre rationnel peut s'écrire sous forme d'une ***fraction à numérateur et dénominateur entiers***. 1/3 est donc un nombre rationnel.

$\mathbb{Q} = \left\{ \dfrac{a}{b} \;/\; a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^* \right\}$ est l'ensemble des nombres rationnels

Exemples.

- $\dfrac{1}{3} \in \mathbb{Q}, \quad \dfrac{-315}{29} \in \mathbb{Q}, \quad \dfrac{1998}{-1997} \in \mathbb{Q}$
- $1,2 = \dfrac{12}{10} = \dfrac{6}{5} \in \mathbb{Q}$
- $-0,375 = -\dfrac{375}{1000} = -\dfrac{3}{8} \in \mathbb{Q}$

Remarques.

- Les deux derniers exemples montrent que tout décimal est aussi un nombre rationnel. En effet, si $x \in \mathbb{D}$, alors on sait que *x* peut s'écrire sous la forme $x = \dfrac{n}{10^m}$ avec $n \in \mathbb{Z}$ et $10^m \in \mathbb{N}^*$; donc *x* peut être représenté par une fraction à numérateur et dénominateur entiers, i.e. $x \in \mathbb{Q}$.

  Donc : $$\mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \tag{1.6}$$

- Tout nombre rationnel peut être écrit soit sous forme d'une fraction (***forme fractionnaire***) soit sous forme d'un ***développement décimal***, par exemple :

  $\dfrac{1}{4}$ est une fraction et 0,25 est son développement décimal.

  $\dfrac{5}{9}$ est une fraction et 0,555… est son développement décimal.

  Attention : Tous les nombres rationnels admettent un développement décimal, mais ce ne sont pas tous des nombres décimaux. Par exemple : $\frac{1}{4}$ est un nombre décimal mais $\frac{5}{9}$ n'est pas un nombre décimal. Rappelez pourquoi ?

- Tout nombre rationnel admet une ***infinité de représentants***, par exemple : $\dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{3}{9} = \dfrac{4}{12}$ sont tous des représentants du même nombre rationnel $\dfrac{1}{3}$. Le ***représentant privilégié*** est la fraction $\dfrac{1}{3}$ car elle est ***irréductible***. Rappelons qu'une fraction $\dfrac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$ est irréductible si et seulement si *a* et *b* n'ont pas de diviseur commun (sauf 1), i.e. $\operatorname{pgcd}\left(a,b\right) = 1$.

Considérons maintenant le développement décimal de quelques nombre rationnels :

- $\dfrac{1}{9} = 0{,}11111... = 0{,}\overline{1}$
- $\dfrac{1}{6} = 0{,}16666... = 0{,}1\overline{6}$
- $\dfrac{1}{7} = 0{,}142857142857142857... = 0{,}\overline{142857}$
- $\dfrac{1}{101} = 0{,}118811881188... = 0{,}\overline{1188}$

On observe dans tous les développements décimaux des suites de chiffres qui se répètent indéfiniment. Ce phénomène est général pour les nombres rationnels, comme l'affirme le théorème suivant :

Théorème 1. Dans le développement décimal de tout nombre rationnel il y a une suite de chiffres qui se répète indéfiniment, appelée ***période*** de ce nombre rationnel.

Démonstration. Admise.

Exemples. La période de $\frac{1}{3}$ est 3, celle de $\frac{1}{6}$ est 6, celle de $\frac{1}{7}$ est 142857 etc. Quelle est la période de $\frac{1}{4}$? Quelle est la période d'un nombre décimal ?

4. Les nombres réels

Il est facile d'inventer des nombres non rationnels, i.e. des nombres dont le développement décimal n'est pas périodique.

Exemples.

- $x = 1,01001000100001000001...$
- $y = 0,123456789101112131415...$ (nombre de Champernowne)

On dit que ces nombres sont ***irrationnels***. Il existe encore beaucoup d'autres nombres irrationnels comme par exemple :

$$\pi = 3,1415926535897932385...,$$

$$\sqrt{2} = 1,41421356...,$$

$$e = 2,71828182845... \text{ (nombre de Napier) } \ldots$$

En fait, on peut démontrer qu'il existe une infinité de nombres irrationnels. Les nombres rationnels, ensemble avec les nombres irrationnels forment l'ensemble de tous les nombres, appelés ***nombres réels***. Retenons :

$$\begin{aligned}
\mathbb{R} &= \text{ensemble de tous les nombres} \\
&= \text{ensemble des nombres réels} \\
&= \text{ensemble des nombres rationnels et des nombres irrationnels}
\end{aligned}$$

$\mathbb{R}^{*}$ = ensemble des nombres réels non nuls

$\mathbb{R}_{+}$ = ensemble des nombres réels positifs

$\mathbb{R}_{-}$ = ensemble des nombres réels négatifs

$\mathbb{I}$ = ensemble des nombres irrationnels

Comme $\mathbb{R}$ est l'ensemble de tous les nombres, il est évident que :

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \text{ et } \mathbb{I} \subset \mathbb{R} \tag{1.7}$$

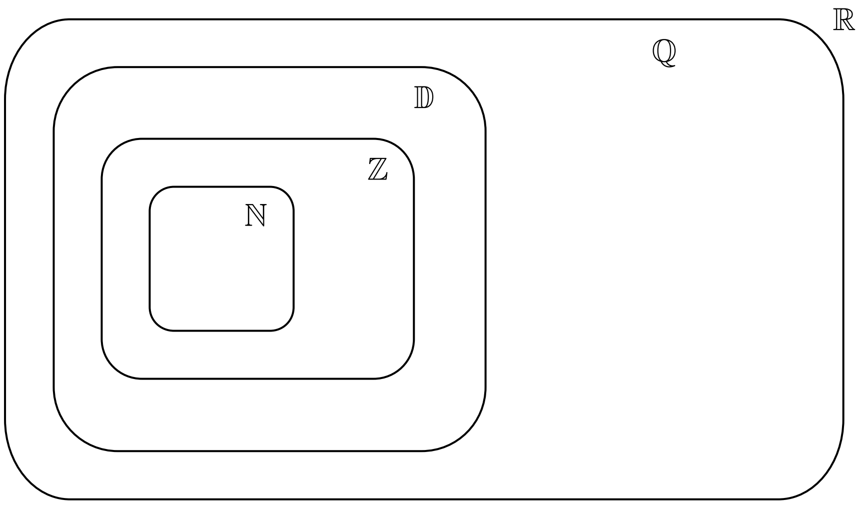
Plus précisément :

$$\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R} \text{ et } \mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \varnothing \tag{1.8}$$

Résumons finalement les relations (1.4) à (1.7) :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \tag{1.9}$$

Voici un diagramme de Venn avec tous les ensembles de nombres :



5. Regles de calcul :

1. Les fractions :

Proprietes :

Soient a,b,c,d quatres nombres reels tels que $b \neq 0$; $d \neq 0$.

- $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$.
- $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$.
- $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}$.
- $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$.

2. Les racines carrees :

Definition:

Soit x un nombre reel positif,la **racine carree** de x est le nombre positif dont le carre est egal à x.

Ce nombre est noté : $\sqrt{x}$.

$\boxed{(\sqrt{x})^2=x}$.

Proprietes :

• Si $a \geq 0$, $\sqrt{a^2} = a$. • Si $a \geq 0$ $b \geq 0$: , $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$. • Si $a \geq 0$ $b > 0$: , $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Remarque :

• $3 - \sqrt{5}$ s'apelle **la quantite conjugue** de l'expression $3 + \sqrt{5}$.

3. Les puissances :

Definition:

• $a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{n \ fois}$.

Proprietes :

• Si $a \neq 0$, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $a^0 = 1$. • $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$. • $(a^m)^n = a^{mn}$, $(ab)^n = a^n \times b^n$.

• Si $b \neq 0$, $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

6. *Identités remarquables*

Pour tous réels a et b , on a :

$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$ $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$	$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab^2 + 3a^2b$ $(a-b)^3 = a^3 - b^3 + 3ab^2 - 3a^2b$	$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

7. *Puissances de 10*

$$10^n = \underbrace{10 \times 10 \times .. \times 10}_{n \, fois} = 1 \underbrace{00 \ldots 0}_{n \, zéros}$$

$$10^{-n} = \frac{1}{10^n} = \underbrace{0{,}00. \ldots 0}_{n \, zéros} 1$$

8. *Ecriture scientifique*

Ecrire un nombre en écriture scientifique c'est l'exprimer sous la forme :

$$\boxed{\underbrace{\boxed{a}}_{Nombre \ entre \ 1 \ et \ 10 \ exclu} \times 10^n}$$

Pour les nombres supérieurs à 1 (en valeur absolue), l'exposant n sera <u>positif</u>.	**Pour les nombres inférieurs à 1 (en valeur absolue), l'exposant n sera <u>négatif</u>.**
$9{,}5 = 9{,}5 \times 10^0$ $50{,}7 = 5{,}07 \times 10^1$ $1\ 000 = 1 \times 10^3$ $1\ 234 = 1{,}234 \times 10^3$ $-25{,}1 = -2{,}51 \times 10^1$ $\frac{5}{2} = 2{,}5 = 2{,}5 \times 10^0$	$0{,}5 = 5 \times 10^{-1}$ $0{,}02 = 2 \times 10^{-2}$ $0{,}0123 = 1{,}23 \times 10^{-2}$ $0{,}000\ 15 = 1{,}5 \times 10^{-4}$ $-0{,}7 = -7 \times 10^{-1}$ $\frac{1}{4} = 0{,}25 = 2{,}5 \times 10^{-1}$