❀ ❀ Les polynômes ❀ ❀

Remarques

I. Définition d'un polynôme – les opérations sur les polynômes

Activité ① :

Soient $(x-1)$ et $(x+1)$ et $(x+4)$ les dimensions d'un parallélépipède tel que x un nombre réel supérieure strictement à 1 et soit $P(x)$ son volume.

Calculer $P(x)$.

- L'expression x^3+3x^2-x-3 s'appelle un polynôme de degré 2 (haute puissance).
- Les expressions $x^3, 3x^2, -x$ *et* -3 s'appellent les monômes de $P(x)$.
- Le nombre 3 est appelé ***le coefficient*** du monôme de deuxième degré , -1 est le ***coefficient*** du monôme de premier degré et -3 son terme constant.

Définitions :

- Un ***monôme*** de la variable x est une expression de la forme ax^n où $a \in IR$ et $n \in IN$, a est appelé le ***coefficient*** et n le ***degré*** du monôme.
- Un ***polynôme*** de la variable x est une somme de monômes de la variable x.
- Le ***degré*** d'un polynôme $P(x)$, noté $deg(P(x))$ *ou* $d°(P(x))$, est celui de son monôme de plus haut degré.

Application ①:

Compléter le tableau suivant :

Les expressions	Polynôme ?		$d°((P(x))$	*Coef de monôme de degré*	
	Oui	Non		2	3
$x^6+24x^2+\frac{\sqrt{2}}{5}$					
$x^4-\lvert x\rvert+4$					
$2x^2+\sqrt{x}+2$					
6					
$2\left(\frac{1}{x}\right)^2+x$					

Remarque :

Le polynôme nul ($P(x)=0$) n'a pas de degré.

II. Les opérations sur les polynômes

Activité ② :

1) Est-ce que les polynômes $P(x)$ et $Q(x)$ sont égaux dans les cas suivants ?

- $P(x)=x^4+2x^2+x$ et $Q(x)=2x^2+x$
- $P(x)=x(x+1)^2-x^2+1$ et $Q(x)=x^3-x^2+x+1$

2) Donner la forme générale d'un polynôme de second degré.

Propriété :

Deux polynômes sont égaux si ont le même degré et si leurs coefficients respectifs des monômes de même degré sont égaux.

Application ②:

On considère $P(x)$ et $Q(x)$ deux polynômes tels que : $P(x)=4x^2-(b-3)x$ et $Q(x)=ax^2+2x+c$.

Déterminer les réels a, b et c pour que les polynômes $P(x)$ et $Q(x)$ soient égaux.

Activité ③:

On considère $P(x)$ et $Q(x)$ deux polynômes tels que : $P(x)=4x^2-3x+1$ et $Q(x)=-3x^3+x$.

1) Calculer $P(x)+Q(x)$ et $P(x)-Q(x)$.
2) Calculer $P(x)\times Q(x)$, puis comparer $d°(P(x)\times Q(x))$ et $d°(P(x))+d°(Q(x))$

Propriété :

Soient $P(x)$ et $Q(x)$ deux polynômes non nuls. On a :

$$d°(P(x)\times Q(x))=d°(P(x))+d°(Q(x))$$

Application ③

Déterminer le degré du polynôme $Q(x)$ puis déterminer sa forme sachant que : $x^4-2x^3+x^2-2x=(x^2+1)Q(x)$.

III. Racine d'un polynôme – divisibilité par x-a

Activité ④:

On considère $P(x)$ un polynôme tel que : $P(x)=5x^3+5x^2-10x$.

1) Parmi les nombres $-1, \sqrt{2}$ *et* 1 trouver ceux qui vérifient $P(a)=0$.

Soit a un nombre réel. On dit que le nombre a est une racine ou un zéro d'un polynôme $Q(x)$ si $Q(a)=0$.

2) Vérifier que 0 est une racine de $P(x)$.

Application ④

Déterminer la valeur du nombre a pour que 2 soit une racine du polynôme $P(x)=x^3-2x^2+ax+6$

Activité ⑤:

On considère le polynôme $P(x)=x^3-x-6$.

1) Calculer $P(1)$.
2) Déterminer le polynôme $Q(x)$ tel que $P(x)-P(1)=(x-1)Q(x)$.

Propriété :

Soit $P(x)$ un polynôme non nul de degré n et a un nombre réel.

- Il existe un polynôme $Q(x)$ de degré $(n-1)$ tel que $P(x)=(x-a)Q(x)+P(a)$.
- $P(x)$ est divisible par $(x-a)$ si a est une racine de $P(x)$.

A-Q(x) est appelé ***le polynôme quotient*** de la division euclidienne de $P(x)$ sur $(x-a)$

et le nombre $P(a)$ est ***le reste*** de cette division.

Exemple :

La division euclidienne de $P(x)=2x^4+3x^3-2x^2-x+1$ par $x-2$.

Le quotient de cette division euclidienne est $2x^3+7x^2+12x+23$ et le reste est $P(2)=47$.

Application ⑤:

On considère $P(x)$ et $Q(x)$ deux polynômes tels que :

$P(x)=2x^3-x^2+x+4$ et $Q(x)=x^3+3x^2+x+7$.

1) **a-**Est-ce que $P(x)$ est divisible par $x+1$?

b-Faire la division euclidienne de $P(x)$ sur $x+1$.

2) **a-**Est-ce que $Q(x)$ est divisible par $x-3$?

b-Faire la division euclidienne de $Q(x)$ sur $x-3$.

Exercice de synthèse:

On considère $P(x)$ un polynôme tel que : $P(x)=x^3-2x^2-5x+6$.

1) Montrer que $P(x)$ est divisible par $x-1$.

2) Déterminer par deux méthodes différentes le polynôme $Q(x)$ tel que :

$P(x)=(x-1)Q(x)$.

3) Montrer que 3 est une racine de $Q(x)$.

4) Factoriser $Q(x)$.

5) En déduire une factorisation de $P(x)$.

6) Résoudre l'équation $P(x)=0$.

Exercice (Devoir maison) :

On considère le polynôme $P(x)=(x-2)^{3n}+(x-1)^{2n}-1$ avec $n\in IN^*$.

1) Montrer qu'il existe un polynôme $Q(x)$ qui vérifie $P(x)=(x-2)Q(x)$.

2) Quel est le degré de $Q(x)$? justifier votre réponse.

3) Calculer $P(1)$ en fonction de n.

4) Déterminer les valeurs de n pour lesquels $P(x)$ soit divisible par $(x-1)$.