Institution : Complexe Scolaire ALQALAM
Année scolaire : 2018 – 2019
Série d'exercices : Notions de logique

Niveau :1SM-SIBM
Prof : Abdellah AIT CHEIKH
+Info : +212 600 694 961

Exercice 1

Déterminer parmi les assertions suivantes lesquelles sont vraies :

1. 136 est un multiple de 17 et 2 divise 167.
2. 136 est un multiple de 17 ou 2 divise 167.
3. $\exists x \in \mathbb{R}, (x+1=0 \text{ et } x+2=0)$.
4. $(\exists x \in \mathbb{R}, x+1=0)$ et $(\exists x \in \mathbb{R}, x+2=0)$.
5. $\forall x \in \mathbb{R}, (x+1 \neq 0 \text{ ou } x+2 \neq 0)$.
6. $\exists x \in \mathbb{R}^*, \forall y \in \mathbb{R}^*, \forall z \in \mathbb{R}^*, z - xy = 0$.
7. $\forall y \in \mathbb{R}^*, \exists x \in \mathbb{R}^*, \forall z \in \mathbb{R}^*, z - xy = 0$.
8. $\forall y \in \mathbb{R}^*, \forall z \in \mathbb{R}^*, \exists x \in \mathbb{R}^*, z - xy = 0$.
9. $\exists a \in \mathbb{R}, \forall \epsilon > 0, |a| < \epsilon$.
10. $\forall \epsilon > 0, \exists a \in \mathbb{R}, |a| < \epsilon$.

Exercice 2

Soient les quatre assertions suivantes :

- (P) : $\exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad x+y>0$
- (Q) : $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad x+y>0$;
- (R) : $\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad x+y>0$
- (S) : $\exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad y^2 > x$.

Les assertions P, Q, R, S sont-elles vraies ou fausses ?

Exercice 3

Écrire la négation des assertions suivantes où P, Q, R, S sont des assertions.

1. $P \Rightarrow Q$,
2. P et (Q et R),
3. P ou (Q et R),
4. (P et Q) $\Rightarrow$ ($R \Rightarrow S$).

Exercice 4

Donner la valeur de vérité de chacune des assertions suivantes en justifiant votre réponse:

P_1 : "$(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}); x < y$"
P_2 : "$(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}); x < y$"
Q_1 : "$[(\exists a \in \mathbb{R}); a > 0] \wedge [(\exists a \in \mathbb{R}); a < 0]$"
Q_2 : "$(\exists a \in \mathbb{R}); a > 0 \wedge a < 0$"

Exercice 5

Déterminer la valeur de vérité des assertions suivantes:

P_1: $(\exists x \in \mathbb{R}) : \cos(x) = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.
P_2 : $(\exists n \in \mathbb{Z})$: $n+1 > n^2$.
P_3: $(\forall n \in \mathbb{R}) : n \in \mathbb{Z} \Rightarrow n \in \mathbb{N}$.
P_4: $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists n \in \mathbb{N}) : x < n$.
P_5: $(\forall x \in \mathbb{R}) : x > 4 \Rightarrow x > 2$.
P_6: $(\forall n \in \mathbb{N})$: (n est pair) ou (n est impair).

P_7: ($\forall n \in \mathbb{N}$: n est pair) ou ($\forall n \in \mathbb{N}$: n est impair).
P_8: $(\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2) : a^2 + b^2 \geq ab \; ou \; |a| + |b| \geq |a+b|$.

Exercice 6

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$.

1). Montrer que: $\dfrac{x^2+y^2}{2} = xy \Leftrightarrow x = y$.

2). Montrer que: $1 + xy = x + y \Leftrightarrow x = 1 \, ou \, y = 1$.

3). Soit $x \in \mathbb{R}^*$: montrer que: $x + \dfrac{1}{x} > 0 \Leftrightarrow x > 0$.

4). Soient $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$. Montrer que: $(x + y + 2 = 2\sqrt{x} + 2\sqrt{y}) \Rightarrow (x = y = 1)$.

5). Montrer que: $(\forall x \in \mathbb{R}^+) : \dfrac{1}{1+\sqrt{x}} = 1 - \sqrt{x} \Rightarrow x = 0$.

Exercice 7

Montrer à l'aide d'un raisonnement par contre-exemple que les assertions suivantes sont fausses:

Q_1: $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : n^2 + n + 1$ est un entier premier.

Q_2: $(\forall n \in \mathbb{N}) : n^2 + n + 41$ est un entier premier.

Q_3: $(\forall x \in \mathbb{R}) : x^2 + x \geq 0$.

Exercice 8

Montrer les propositions suivantes:

P: $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) : x + \dfrac{9}{x} \geq 6$.

Q: $(\forall x \in \mathbb{R}); \dfrac{(\cos(x) + \sin(x))^2 - 1}{2} = \cos(x) \cdot \sin(x)$.

R: $(\forall x \in \mathbb{R}) : \dfrac{x^2+1}{2} \geq x$.

Exercice 9

Soient a et b deux nombres réels tels que $a^2 + b^2 = 1$.

Montrer que: $|a + b| \geq \sqrt{2}$.

Exercice 10

1). Soient a, b et c des nombres réels: Montrer que: $a + b > 2c \Rightarrow a > c \, ou \, b > c$.

2). Montrer que: $(\forall (x, y) \in \mathbb{R}_*^2) : y \neq -\dfrac{3}{4}x \Rightarrow \dfrac{x-y}{x+y} \neq 7$.

3). Montrer que: $(\forall x \in \mathbb{R}^+) : x \neq 4 \Rightarrow \sqrt{x} - 1 \neq \dfrac{x}{4}$.

4). Montrer que: $(\forall x \in \mathbb{R}); x \neq 1$ ou $y \neq 1 \;\Rightarrow\; \dfrac{x^2+y^2}{2} \neq x + y - 1$.

Exercice 11

1). Montrer que: $(\forall x \in \mathbb{R}^*) : \sqrt{1+x^2} \neq 1 + \dfrac{x^2}{2}$.

2). Montrer que: $(\forall x \in \mathbb{R}) : x^2 + 1 \neq 2x - 1$.

3). Soit $a \in \mathbb{N}^*$, montrer que $n^2 + 1$ n'est pas un carré parfait.

4). Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) : x^2 \geq 2x - 1$.

5). Soit f une fonction strictement croissante sur un intervalle I et soient a et b deux éléments de I, tels que: $f(a) = f(b)$, montrer que $a = b$.

Exercice 12

1). Montrer que: $(\forall x \in \mathbb{R}) : |x| \leq \dfrac{x^2+1}{2}$.
2). Montrer que: $(\forall x \in \mathbb{R}) : (x = 2 \ \vee \ y = 2) \Rightarrow xy + 4 = 2y + 2x$.
3). Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes:
(a). $|x-2| = 2x+4$.
(b). $x^2 + 2|x-1| - 1 = 0$.
(c). $|x-2| + |x-1| + |x| = 3$.
4). Montrer que: $(\forall x \in \mathbb{R}) : |x-1| < x^2 + x + 3$.

Exercice 13

Montrer les assertions suivantes:
1). $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : 1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
2). $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
3). $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : 1 + 3 + 3^2 \cdots + 3^n = \dfrac{3^{n+1}-1}{2}$.
4). $(\forall n \in \mathbb{N}) :$ $6^n - 1$ est un multiple de 5.
5). $(\forall n \in \mathbb{N}) :$ $4^n + 6n - 1$ est un multiple de 9.
6). $(\forall n \in \mathbb{N}) :$ $3^{2n} - 2^n$ est un multiple de 7.
7). $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}) : 9^{n-1} - 1$ est un multiple de 8.

Exercice 14

Donnez la négation mathématique des phrases suivantes:

1. Tout triangle rectangle possède un angle droit;
2. Toutes les boules contenues dans l'urne sont rouges;
3. Pour tout entier x, il existe un entier y tel que, pour tout entier z, la relation $z < x$ implique le relation $z < x + 1$;
4. $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \qquad (|x - \frac{7}{5}| < \alpha \Rightarrow |5x - 7| < \epsilon)$.

Exercice 15

1. Démontrer que l'opposé et l'inverse d'un irrationnel sont des irrationnels
2. Démontrer que la somme d'un rationnel et d'un irrationnel est un irrationnel.
3. Que dire: du produit d'un rationnel non nul par un irrationnel ?
4. Que dire: de la somme de deux irrationnels positifs ?
5. $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ est-il rationnel ?

Exercice 16

Résoudre le système d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et de paramètre réel m:

$$(S) : \begin{cases} mx + y = 1 \\ x + my = m^2 \end{cases}$$

Exercice 17

Soit f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Traduire en termes de quantificateurs les expressions suivantes :

1. f n'est pas la fonction nulle ;
2. f est impaire;
3. f ne s'annule jamais;
4. f est paire;
5. f est croissante;
6. f est strictement décroissante;
7. f est inférieure à g;
8. f n'est pas inférieure à g;
9. f est constante;

Exercice 18

1. En utilisant le raisonnement par contraposée, démontrer que si x et y sont deux nombres réels différents alors les nombres $(x+1)(y-1)$ et $(x-1)(y+1)$ sont différents.
2. Démontrer, en raisonnant par l'absurde, que si n est un entier strictement positif alors $n^2 + 1$ n'est pas le carré d'un entier naturel.
3. Un rectangle a pour aire 170 m^2. Montrer que sa longueur est supérieure à 13 m.
4. Démontrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence la propriété suivante :$P(n)$: $10^n - (-1)^n$ est divisible par 11.

Exercice 19

Soient n et m deux entiers naturels.

1. Montrer que si n n'est pas un carré, $\sqrt{n}$ est irrationnel.
2. Montrer que si $\sqrt{n} + \sqrt{m}$ est rationnel, alors $\sqrt{n} - \sqrt{m}$ également.
3. En déduire que si l'un au moins parmi n et m n'est pas un carré, alors $\sqrt{n}+\sqrt{m}$ est irrationnel.