

Série des exercices : Notions de logique

Exercice 01 : Donner la négation et la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes s'il est possible.

- 1) $P : " \forall x \in \mathbb{R} / x^2 \geq 0 "$
- 2) $Q : " \exists x \in \mathbb{R} / x^2 - 2 = 0 "$
- 3) $R : " \forall x, y \in \mathbb{R} : x^2 \neq y^2 "$
- 4) $S : " \forall n \in \mathbb{N} \exists m \in \mathbb{N} : n < m "$
- 5) $T : " \forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{Q} / x = y \text{ ou } x > y "$
- 6) $V : " \exists y \in \mathbb{Q} \forall x \in \mathbb{R} / x = y \text{ ou } x > y "$
- 7) $M : " \forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{Q} : y^2 = x "$
- 8) $N : " \forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} / x^2 = y^2 \text{ et } x = y "$
- 9) $P_1 : " \forall x \in \mathbb{R} / -1 \leq \cos x \leq 1 "$
- 10) $P_2 : " a = b = c "$
- 11) $P_3 : " a > b \Rightarrow a \geq c "$
- 12) $P_4 : " \forall x, y \in \mathbb{R}^2 : x - y = 1 \Leftrightarrow x > 1 "$

Exercice 02 : Écrire à l'aide des quantificateurs les propositions suivantes.

1. Il existe un réel M tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $x \leq M$
2. Le carré de tout réel est positif.
3. Certains réels sont strictement supérieurs à leur carré.
4. Il n'existe aucun nombre rationnel, qui résout l'équation $x^2 = 2$.
5. f est une fonction constante sur \mathbb{R} .
6. Entre deux réels distincts, il existe un rationnel.
7. Il existe un entier multiple de tous les autres.

Exercice 03 : ✨ Raisonnement par Dédution ✨

1. Soit $x, y \in \mathbb{R}$

$$\text{Montrer que : } \begin{cases} 0 \leq x < 2 \\ 0 \leq y < 2 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} > 1$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}^+$

$$\text{Montrer que : } \frac{1}{1 + \sqrt{x}} = 1 - \sqrt{x} \Rightarrow x = 0$$

3. A- Montrer que

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^2 : a^2 + b^2 = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ et } b = 0$$

B- $x \in \mathbb{R}^+$ et $y \in \mathbb{R}^+$, montrer que :

$$x + y + 2 = 2\sqrt{x} + 2\sqrt{y} \Rightarrow x = y = 1$$

Exercice 04 : ✨ Raisonnement par Contre-exemple ✨

1. Donner avec justification la valeur de vérité de $P : « \text{Tous les nombres premiers sont impairs} »$
2. Montrer que cette assertion est fautive :
« $\forall n \in \mathbb{N} : n^2 + n + 1$ est un nombre premier »

3. Montrer que les propositions suivantes sont fausses :

$$P_1 : \forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} / x^2 + y^2 \geq x + y$$

$$P_2 : \forall a, b \in \mathbb{R}^2 / \sqrt{a^2 + b^2} = a + b$$

Exercice 05 : ✨ Raisonnement par Contraposée ✨

1. Montrer que $x \neq 2$ et $y \neq 2 \Rightarrow 2x + 2y - xy - 2 \neq 2$
2. Montrer que $x \neq y \Rightarrow x + 1 / y - 1 \neq x - 1 / y + 1$
3. Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que si n^2 est impair alors n est impair.
4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}; n, n + 1, n + 2$ est divisible par 3

Exercice 06 : ✨ Raisonnement par Équivalences ✨

$$\text{Soit } x \in \mathbb{R}, \text{ montrer que : } |x - 1| \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{5} \leq \frac{1}{x + 1} \leq \frac{2}{3}$$

Exercice 07 : ✨ Raisonnement par Disjonction des cas ✨

1. Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation suivante :

$$|x - 1| + 2x - 3 \geq 0$$

2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} : |x - 1| \leq x^2 - x + 1$

3. Soit $n, p \in \mathbb{N}$, montrer que $n \times p$ est pair ou $n^2 - p^2$ est un multiple de 8.

Exercice 08 : ✨ Raisonnement par l'Absurde ✨

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ Montrer que $\sqrt{n^2 + 1}$ n'est pas un entier.

2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* : \sqrt{\frac{n}{n+1}} \notin \mathbb{Q}$

3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : \frac{n+1}{n+2} \notin \mathbb{N}$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$ Posons $A = \frac{n+3}{n+5}$, Montrer que $A \neq 1$

Exercice 09 : ✨ Raisonnement par Récurrence ✨

1. Montrer par récurrence les formules suivantes :

$$\text{a- } \forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{k=n} k = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\text{b- } \forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{k=n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\text{c- } \forall n \in \mathbb{N}^* : 1 + 3 + 5 + \dots + 2n + 1 = n + 1^2$$

2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}; 4^n + 6n - 1$ est divisible par 9.

3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}; 7^n - 1$ est divisible par 6.

4. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ (Nombre réel fixe)

$$\text{Montrer que } \forall n \in \mathbb{N}; 1 + a^n \geq 1 + n \times a$$