Le contenu	Remarques

I. Ordre et opérations

1. L'ordre

Activité :

Comparer les Nombres A et B dans les cas suivants :

- $A=\dfrac{7}{15}$ et $B=\dfrac{6}{17}$.
- $A=3\sqrt{5}$ et $B=\sqrt{37}$.

Définition :

Soient a et b deux réels.

On dit que a est inférieur ou égal b et on écrit : $a\le b$ si $a-b\le 0$.

Application :

.Comparer les nombres A et B dans les cas suivants :

- $A=\dfrac{2n-1}{2n}$ et $B=\dfrac{2n}{2n+1}$ avec $n\in\mathbb{N}^*$.
- $A=\sqrt{a+b}$ et $B=\sqrt{a}+\sqrt{b}$ avec $a\in\mathbb{R}^+$ et $b\in\mathbb{R}^+$.

Propriété :(ordre et addition)

Soient a, b, c et d des nombres réels.

- Si $a\le b$,alors $a+c\le b+c$.
- Si $a\le b$ et $c\le d$,alors $a+c\le b+d$.

Exemple:

Soient $a\le\dfrac{5}{7}$ et $b\le\dfrac{16}{7}$. On a : $a+b\le\dfrac{5}{7}+\dfrac{16}{7}$ c'est-à-dire $a+b\le\dfrac{21}{7}$, donc $a+b\le 3$.

Propriété :(ordre et multiplication)

Soient a, b, c, d et k des nombres réels.

- Si $k\ge 0$, alors : $a\le b$ équivalent à $ka\le kb$.
- Si $k\le 0$, alors : $a\le b$ équivalent à $ka\ge kb$.
- Si $0\le a\le b$ et $0\le c\le d$,alors : $ac\le bd$.

Exemples:

- Si $a\le\dfrac{2}{\sqrt{3}}$,alors $-\sqrt{3}a\ge -2$ car $-\sqrt{3}\le 0$
- Si $0\le x\le\dfrac{3}{2}$ et $0\le y\le 2$,alors $xy\le 2.\dfrac{3}{2}$ c'est-à-dire $xy\le 3$.

Propriété :(ordre et inverse)

Soient a et b deux nombres réels.

- Si $0\prec a\le b$, alors $0\prec\dfrac{1}{b}\le\dfrac{1}{a}$.
- Si $a\le b\prec 0$, alors $\dfrac{1}{b}\le\dfrac{1}{a}\prec 0$.

Exemples:

- Si $0 \prec x \leq 3$, alors : $0 \prec \frac{1}{3} \leq \frac{1}{x}$.
- Si $-\frac{5}{6} \leq x \prec 0$, alors $\frac{1}{x} \leq -\frac{6}{5} \prec 0$.

Propriété :(ordre et racine carrée- ordre et carré)

Soient a et b deux nombres réels.

- Si $0 \leq a \leq b$, alors $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$.
- Si $0 \leq a \leq b$, alors $a^2 \leq b^2$.
- Si $a \leq b \leq 0$, alors $a^2 \geq b^2$.

Exemples:

- On a $2 \leq \sqrt{5}$ donc $2^2 \leq \sqrt{5}^2$ c'est à dire $4 \leq 5$.
- On a $-3 \leq -2$ donc $(-3)^2 \geq (-2)^2$ c'est à dire $9 \geq 4$.

Application : Exercice 3 de la série.

Exercice : Exercice 4 de la série.

2. L'encadrement

Activité :

Soient x et y deux nombres réels tels que: $3 \leq x \leq 7$ et $2 \leq y \leq 5$.

Encadrer les expressions suivantes : $x+y$, $x-y$, xy et $\frac{x}{y}$.

Définition :

Soient a et b deux réels tels que : $a \prec b$.

Chaque inégalité parmi les doubles inégalités suivantes : $a \leq x \leq b$, $a \leq x \prec b$, $a \prec x \leq b$ et $a \prec x \prec b$ est appelée **encadrement** de x d'amplitude $b-a$.

Exemple:

L'écriture $3{,}14 \prec \pi \leq 3{,}15$ est un encadrement de π d'amplitude $3{,}15 - 3{,}14 = 0{,}01$.

Propriétés :

Soient a, b, c et d des nombres réels.

- Si $a \leq x \leq b$ et $c \leq y \leq d$,alors $a+c \leq x+y \leq b+d$ et $a-d \leq x-y \leq b-c$.
- Si $0 \leq a \leq x \leq b$,alors $a^2 \leq x^2 \leq b^2$.
- Si $a \leq x \leq b \leq 0$,alors $b^2 \leq x^2 \leq a^2$.
- Si $a \leq x \leq b$ tels que a et b ont le même signe, alors $\frac{1}{b} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{a}$.

Application :

Soient x et y deux nombres réels tels que: $-4 \leq x \leq -1$ et $2 \leq y \leq 5$.

Encadrer les expressions suivantes : $x+y$, $x-y$, xy , $\frac{x}{y}$ et $\frac{2xy}{x^2-y^2}$.

Exercices : Exercice 12 et 13 de la série.

II. Intervalles :

1. Droite numérique - Intervalles de $\mathbb{R}$

Activité :

Soit (D) une droite rapportée au repère (O,I) tel que OI=1cm.

1) Placer sur l'axe D(O,I) les points A(2) et B(-3) et C$\left(-\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}\right)$.

2) Représenter sur l'axe D(O,I) l'ensemble des points d'abscisses x dans les cas suivants:

• $2 \leq x \leq 5$	• $1 \leq x < 4$	• $x \geq 2$	• $x < 5$

Les nombres x qui vérifient : $2 \leq x \leq 5$ représentent un intervalle noté $[2;5]$.

Application :

Déterminer, dans chacun des cas suivants, l'intervalles auquel appartient le nombre a.

1) $-3 \leq a \leq 9$	**2)** $0 < a < \sqrt{5}$	**3)** $1 < a \leq 4$	**4)** $-7 \leq a < 3$
5) $a \leq \sqrt{2}$	**6)** $a \geq 3\sqrt{7}$	**7)** $a < \frac{3}{7}$	**8)** $a < \frac{3}{7}$

2. Réunion-Intersection d'intervalles :

Activité :

On considère les intervalles $I = [-3;5]$, $J =]2;7[$ et $K = [6;+\infty[$.

1) Représenter les intervalles I et J et K sur la droite numérique à l'aide de couleurs différentes.

2) Déterminer : $I \cap J$; $J \cap K$ et $I \cap K$.

Le symbole "$\cap$" se lit « intersection » ou « inter ».

3) Déterminer : $I \cup J$; $J \cup K$ et $I \cup K$.

Le symbole "$\cup$" se lit « union .

Remarques :

Soient I et J deux intervalles de IR.

- $x \in I \cap J$ signifie que $x \in I$ et $x \in J$.
- $x \in I \cup J$ signifie que $x \in I$ ou $x \in J$.

Exemples:

$[1;5] \cap]2,6] =]2;5]$	$]-\infty;1] \cap [1,4[= \{1\}$	$]-1;2[\cap [3,4[= \varnothing$
$[-3;2[\cup]1;4[= [-3;4[$	$]-\infty;3] \cup [3;-\infty[=]-\infty;-\infty[= IR$	

Remarques :

$IR^+ = [0,+\infty[$	$IR^{*+} =]0,+\infty[$	$IR^- =]-\infty,0]$	$IR^{*-} =]-\infty,0[$	$IR =]-\infty;-\infty[$

Définition :

Soit $I = [a;b]$ un intervalle de IR tel que : $a \prec b$.

- On appelle **longueur** de I le nombre : $b - a$
- On appelle **centre** de I le nombre : $\frac{b+a}{2}$
- On appelle **rayon** de I le nombre : $\frac{b-a}{2}$

Remarque:

La définition précédente est valable pour les intervalles: $[a;b[$, $]a;b]$ et $]a;b[$.

❍ Exemple:

On considère l'intervalle : $I =]-6;4[$.

- **La longueur** de I est: $l = 4-(-6) = 10$
- **Le centre** de I est: $c = \dfrac{4+(-6)}{2} = -1$
- Le **rayon** de I est: $r = \dfrac{4-(-6)}{2} = 5$

III. Valeur absolue

Activité :

Soit (D) une droite rapportée au repère (O,I) tel que OI=1cm.

1) Placer sur l'axe $D(O,I)$ les points $A(2)$ et $B(4)$ et $C(-5)$ et. $E(-2)$

2) Donner deux abscisses ont la même distance de 0.

3) Calculer les distances AB; AE; AC et EB.

Définition :

Soit $x \in IR$.

On appelle la **valeur absolue** du nombre x le nombre réel positif noté $|x|$ tel que :

- Si $x \geq 0$, alors $|x| = x$.
- Si $x \leq 0$, alors $|x| = -x$.

❍ Exemple:

$\left|\sqrt{3}-2\right| = -(\sqrt{3}-2) = 2-\sqrt{3}$.

Définition :

Soient $A(a)$ et $B(b)$ deux points sur un axe normé. On a : $AB = |b-a|$.

❍ Exemple:

Cherchons la distance entre les points $A(\sqrt{7}-2)$ et $B(\sqrt{5}-2)$:

$AB = \left|\left(\sqrt{5}-2\right)-\left(\sqrt{7}-2\right)\right| = \left|\sqrt{5}-\sqrt{7}\right| = -(\sqrt{5}-\sqrt{7}) = \sqrt{7}-\sqrt{5}$

Propriétés :

Soient $x \in IR$ et $y \in IR$. On a :

- ⊗ $|x| = |-x|$
- ⊗ $|x^2| = |x|^2 = x^2$
- ⊗ $|xy| = |x||y|$
- ⊗ $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$ $(y \neq 0)$
- ⊗ $|x+y| \leq |x|+|y|$
- ⊗ $|x-y| \geq |x|-|y|$
- ⊗ $\sqrt{x^2} = |x|$
- ⊗ $|x| = |y|$ signifie $x = y$ ou $x = -y$

❍ Exemple: .

$|x| = 2$ signifie $x = 2$ ou $x = -2$.

Application ①: Exercice 15 de la série.

Application ② :

Résoudre les équations (E_1): $|2x-5| = 7$ et (E_1): $|3x+6| = -2$.

Exercice : Exercice 18 de la série.

Propriétés :

Soient $x \in IR$ et $r \in IR_{+}^{*}$. On a :

- $|x| \leq r$ signifie que : $-r \leq x \leq r$
- $|x| \geq r$ signifie que : $x \geq r$ ou $-x \geq r$ c'est-à-dire $x \in]-\infty,-r] \cup [r,+\infty[$.

Application: Exercice 20 de la série.

IV. Approximations-Approximations décimales

1. Approximation par défaut et par excès:

Définition :

Soit : $a \leq x \leq b$ ou $a \leq x \prec b$ ou $a \prec x \leq b$ ou $a \prec x \prec b$.

Le nombre a est appelé **approximation par défaut** de x à $b-a$ prés.

Le nombre b est appelé **approximation par excès** de x à $b-a$ prés.

Exemple:

On a : $2,645 < \sqrt{7} < 2,646$.

- Le nombre $2,645$ est une approximation **par défaut** de $\sqrt{7}$ à $2,646-2,645=10^{-3}$ prés.
- Le nombre $2,646$ est une approximation **par excès** de $\sqrt{7}$ à 10^{-3} prés.

2. Valeur approchée

Définition :

Soient $x \in IR$ et $r \in IR^{*+}$.

Si $|x-a| \leq r$, on dit que a est une valeur approchée de x à r prés.

Exemple:

On a : $\left|\sqrt{5}-2,23\right| \leq 0,01$. $2,23$ est une valeur approchée de $2,23$ à $0,01$ prés.

Application :

Déterminer toutes les valeurs approchées de $\dfrac{3}{7}$ à $0,1$ prés.

Remarque:

Si $a \leq x \leq b$, alors $\dfrac{b+a}{2}$ est une valeur approchée de x à $\dfrac{b-a}{2}$ prés.

Exemple:

Cherchons une valeur approchée de $\sqrt{5}+\sqrt{7}$.

On a : $2,236 \leq \sqrt{5} \leq 2,237$ et $2,645 \leq \sqrt{7} \leq 2,646$.

Alors : $4,881 \leq \sqrt{5}+\sqrt{7} \leq 4,883$.

Par conséquent : $(\sqrt{5}+\sqrt{7}) \in I = [4,881;4,883]$

Le centre de I est $c = \dfrac{4,881+4,883}{2} = 4,882$ et de rayon $c = \dfrac{4,883-4,881}{2} = 0,001 = 10^{-3}$

Donc $4,882$ une valeur approchée de $\sqrt{5}+\sqrt{7}$ à 10^{-3} prés.

3. Approximations décimales

Définition :

Soit x un nombre réel tel que $N\times10^{-p}\leq x\leq(N+1)\times10^{-p}$ avec $p\in IN$ et $N\in\mathbb{Z}$.

Le nombre $N\times10^{-p}$ est appelé l'**approximation décimale par défaut** de x à 10^{-p} prés.

Le nombre $(N+1)\times10^{-p}$ est appelé l'**approximation décimale par excès** de x à 10^{-p} prés.

Exemple:

On a : $0,62\leq\frac{5}{8}\leq0,63$, C'est-à-dire $62\times10^{-2}\leq\frac{5}{8}\leq63\times10^{-2}$.

Le nombre 62×10^{-2} est l'approximation décimale par défaut de $\frac{5}{8}$ à 10^{-2} prés.

Le nombre 63×10^{-2} est l'approximation décimale par excès de $\frac{5}{8}$ à 10^{-2} prés.

Application :

On pose : $x=\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}$.

Sachant que $1,73\prec\sqrt{3}\prec1,74$ et $2,64<\sqrt{7}<2,65$, donner l'approximation décimale par défaut et par excès de x à 10^{-2} prés.

Exercice : Exercice N° 23 de la série.