

Ch. 3 :L'ordre dans IR

Partie 1 (les intervalles de IR)

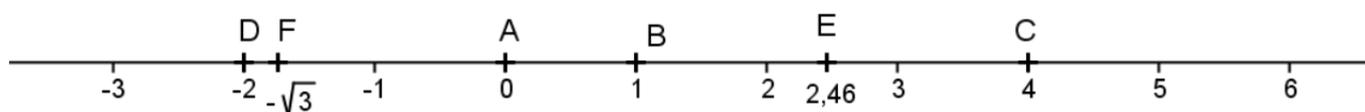
I) Les intervalles de \mathbb{R}

1) Définitions

a) Représentation graphique de \mathbb{R}

L'ensemble des nombres réels est habituellement représenté sous la forme d'une droite graduée : à chaque point de la droite est associé un unique nombre réel appelé **abscisse** de ce point

Exemple



Les abscisses des points A, B, C, D, E et F sont respectivement :

$$x_A = 0 ; x_B = 1 ; x_C = 4 ; x_D = -2 ; x_E = 2,46 \text{ et } x_F = -\sqrt{3}$$

b) Les intervalles de \mathbb{R}

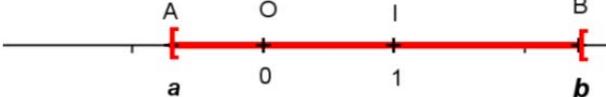
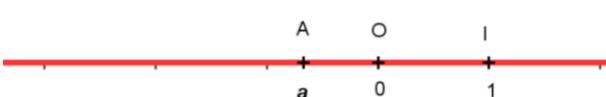
Un **intervalle de \mathbb{R}** est représenté par un segment, une demi-droite ou par la droite toute entière. Chaque intervalle est associé à une inégalité ou un encadrement concernant les abscisses des points de la droite appartenant à ce segment ou cette demi-droite.

Soit A et B deux points de la droite d'abscisses respectives a et b ($a < b$) et soit M un point de la droite d'abscisse x

On obtient donc les différents intervalles suivants :

2) Tableau récapitulatif des neuf intervalles de \mathbb{R}

Les neuf types d'intervalles sont dans le tableau ci-dessous:

| M | Nombres x | Représentation graphique | Notation intervalle |
|--------------|--------------------|---|----------------------|
| $M \in [AB]$ | $a \leq x \leq b$ |  <p>Intervalle fermé borné</p> | $[a; b]$ |
| $M \in]AB[$ | $a < x < b$ |  <p>Intervalle ouvert borné</p> | $]a; b[$ |
| $M \in [AB[$ | $a \leq x < b$ |  <p>Intervalle semi-ouvert à droite, borné</p> | $[a; b[$ |
| $M \in]AB]$ | $a < x \leq b$ |  <p>Intervalle semi-ouvert à gauche, borné</p> | $]a; b]$ |
| $M \in [AB)$ | $x \geq a$ |  <p>Intervalle fermé infini</p> | $[a; +\infty[$ |
| $M \in]AB)$ | $x > a$ |  <p>Intervalle ouvert infini</p> | $]a; +\infty[$ |
| $M \in [BA)$ | $x \leq b$ |  <p>Intervalle fermé infini</p> | $]-\infty; b]$ |
| $M \in]BA)$ | $x < b$ |  <p>Intervalle ouvert infini</p> | $]-\infty; b[$ |
| $M \in (d)$ | $x \in \mathbb{R}$ |  | $]-\infty; +\infty[$ |

Remarques :

- On dit qu'un intervalle est **fermé** si ses extrémités lui appartiennent.
Par exemple : $[6 ; 12]$ ou $[-2 ; +\infty[$ sont des intervalles fermés.
- On dit qu'un intervalle est **ouvert** si ses extrémités ne lui appartiennent pas
Par exemple : $] -4 ; 7 [$ ou $] -\infty ; 3 [$ sont des intervalles ouverts.
- L'ensemble \mathbb{R} est aussi un intervalle, il peut se noter $]-\infty ; +\infty[$
- L'ensemble ne contenant **aucun réel est aussi un intervalle**, c'est l'**intervalle vide**, il se note \emptyset
- Le symbole ∞ se lit **infini**.

Dans le paragraphe suivant, nous allons voir plus en détail ces neuf intervalles de \mathbb{R}

3) Les neuf intervalles de \mathbb{R} (explication détaillée)

a) Les intervalles fermés bornés

Soit a et b deux nombres réels. On appelle intervalle fermé borné de a à b , et on note $[a; b]$, le sous-ensemble de \mathbb{R} contenant tous les nombres réels compris entre a et b ; les nombres a et b sont eux-mêmes éléments de $[a; b]$.

$$[a; b] = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$$

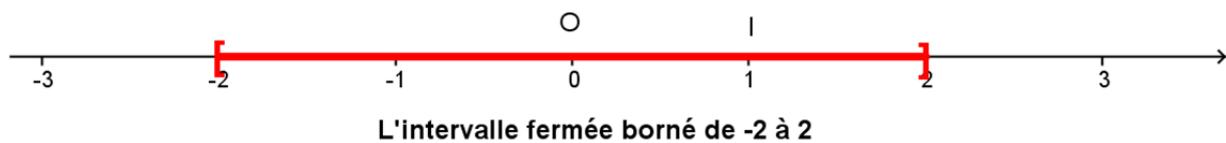
Remarques.

Les nombres a et b sont appelés bornes de l'intervalle $[a; b]$.

Si $a > b$, on adopte la convention : $[a; b] = \emptyset$ (ensemble vide).

Si $a = b$, alors $[a; b] = \{a\}$. L'intervalle dans ce cas est réduit à un singleton.

Si $a < b$, alors $[a; b]$ contient une infinité de nombres, mais sa longueur est finie et vaut $b - a$. On peut en donner la représentation géométrique suivante :



b) Les intervalles ouverts bornés

Soit a et b deux nombres réels. On appelle intervalle ouvert borné de a à b , et on note $]a; b[$, le sous-ensemble de \mathbb{R} contenant tous les nombres réels compris entre a et b ; les nombres a et b ne sont eux-mêmes pas éléments de $]a; b[$.

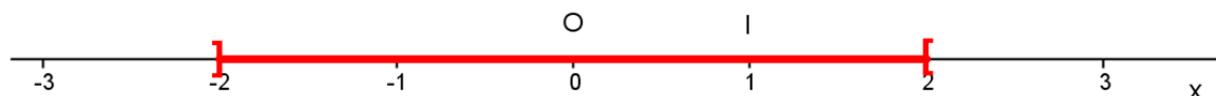
$$]a; b[= \{x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$$

Remarques :

Les nombres a et b sont appelés bornes de l'intervalle $]a; b[$.

Si $a \geq b$, on adopte la convention : $]a; b[= \emptyset$ (ensemble vide).

Si $a < b$, alors $]a; b[$ contient une infinité de nombres, mais sa longueur est finie et vaut $b - a$. On peut en donner la représentation géométrique suivante :



L'intervalle ouvert borné de -2 à 2

c) Les intervalles semi-ouverts à droite bornés

Soit a et b deux nombres réels. On appelle intervalle semi-ouvert à droite borné de a à b , et on note $[a; b[$, le sous-ensemble de \mathbb{R} contenant tous les nombres réels compris entre a et b ; le nombre a est un élément de $[a; b[$ mais b n'est pas un élément de $[a; b[$.

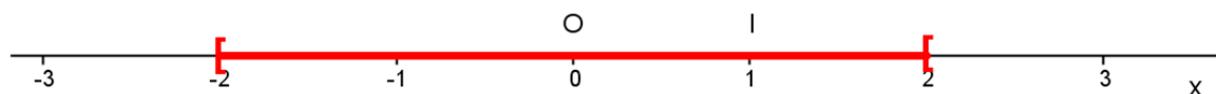
$$[a; b[= \{x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\}$$

Remarques :

Les nombres a et b sont appelés bornes de l'intervalle $[a; b[$.

Si $a \geq b$, on adopte la convention : $[a; b[= \emptyset$ (ensemble vide).

Si $a < b$, alors $[a; b[$ contient une infinité de nombres, mais sa longueur est finie et vaut $b - a$. On peut en donner la représentation géométrique suivante :



L'intervalle semi-ouvert à droite borné de -2 à 2

d) Les intervalles semi-ouverts à gauche bornés

Soit a et b deux nombres réels. On appelle intervalle semi-ouvert à gauche borné de a à b , et on note $]a; b]$, le sous-ensemble de \mathbb{R} contenant tous les nombres réels compris entre a et b ; le nombre a n'est pas un élément de $]a; b]$, mais b est un élément de $]a; b]$.

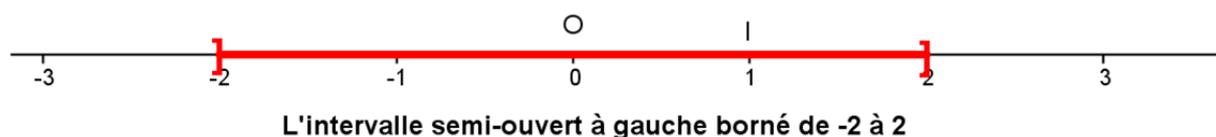
$$]a; b] = \{x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}$$

Remarques :

Les nombres a et b sont appelés bornes de l'intervalle $]a; b]$.

Si $a \geq b$, on adopte la convention : $]a; b] = \emptyset$ (ensemble vide).

Si $a < b$, alors $]a; b]$ contient une infinité de nombres, mais sa longueur est finie et vaut $b - a$. On peut en donner la représentation géométrique suivante :



e) Les intervalles ouverts infinis. Cette catégorie contient elle-même deux types d'intervalles

• Soit a un nombre réel. On appelle intervalle ouvert infini de a à $+\infty$, et on note $]a; +\infty[$, le sous-ensemble de \mathbb{R} contenant tous les nombres réels strictement supérieurs à a ; le nombre a n'est pas un élément de $]a; +\infty[$.

$$]a; +\infty[= \{x \in \mathbb{R}, a < x\}$$

Remarques :

Le nombre a et le symbole $+\infty$ sont appelés bornes de l'intervalle $]a; +\infty[$.

Il contient une infinité de nombres.

Sa longueur est infinie. On peut en donner la représentation géométrique suivante :



• Soit a un nombre réel. On appelle intervalle ouvert infini de $-\infty$ à a , et on note $] - \infty; a[$, le sous-ensemble de \mathbb{R} contenant tous les nombres réels strictement inférieurs à a ; le nombre a n'est pas un élément de $] - \infty; a[$.

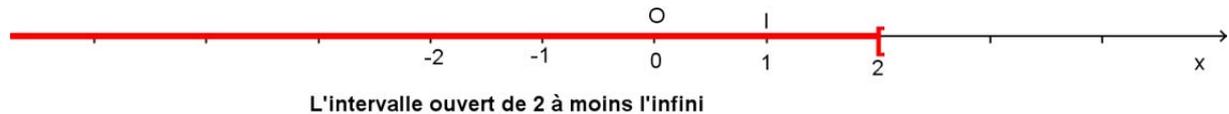
$$] - \infty; a[= \{x \in \mathbb{R}, x < a\}$$

Remarques :

Le nombre a et le symbole $-\infty$ sont appelés bornes de l'intervalle $] - \infty; a[$.

Il contient une infinité de nombres.

Sa longueur est infinie. On peut en donner la représentation géométrique suivante :



f) Les intervalles fermés infinis. Cette catégorie contient elle-même deux types d'intervalles

• Soit a un nombre réel. On appelle intervalle fermé infini de a à $+\infty$, et on note $[a; +\infty[$, le sous-ensemble de \mathbb{R} contenant tous les nombres réels supérieurs à a ; le nombre a est un élément de $[a; +\infty[$.

$$[a; +\infty[= \{x \in \mathbb{R}, a \leq x\}$$

Remarques :

Le nombre a et le symbole $+\infty$ sont appelés bornes de l'intervalle $[a; +\infty[$.

On observe un crochet ouvert à la borne $+\infty$. Ce n'est pas une erreur. Ce fait peut être considéré comme une convention au niveau de la classe de seconde. Il faut attendre une étude plus approfondie des nombres réels pour avoir une explication cohérente de ce fait. Il contient une infinité de nombres.

Sa longueur est infinie. On peut en donner la représentation géométrique suivante :



• Soit a un nombre réel. On appelle intervalle fermé infini de $-\infty$ à a , et on note $] - \infty; a]$, le sous-ensemble de \mathbb{R} contenant tous les nombres réels inférieurs à a ; le nombre a est un élément de $] - \infty; a]$.

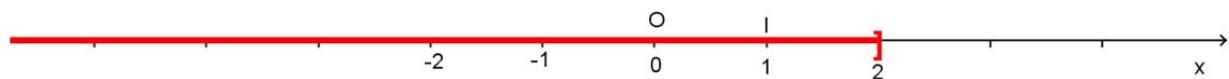
$$] - \infty; a] = \{x \in \mathbb{R}, x \leq a\}$$

Remarques :

Le nombre a et le symbole $-\infty$ sont appelés bornes de l'intervalle $] - \infty; a]$.

On observe un crochet ouvert à la borne $+\infty$. Ce n'est pas une erreur. Ce fait peut être considéré comme une convention au niveau de la classe de seconde. Il faut attendre une étude plus approfondie des nombres réels pour avoir une explication cohérente de ce fait. Il contient une infinité de nombres.

Sa longueur est infinie. On peut en donner la représentation géométrique suivante :



L'intervalle fermé de 2 à moins l'infini

L'intervalle $] - \infty; +\infty[$. C'est une autre façon de noter \mathbb{R} .

Remarques :

Les symboles $-\infty$ et $+\infty$ sont appelés bornes de l'intervalle $] - \infty; +\infty [$.

Il est de longueur infinie.

Pour des raisons élucidées à des niveaux supérieurs à celui de la classe de seconde, cet intervalle est à la fois ouvert et fermé !!

II) Intersections et réunions d'intervalles

1) Intersections

a) Définition

Soit E et F deux ensembles quelconques. On appelle intersection de E et F , et on note $E \cap F$, l'ensemble des éléments qui sont communs à E et F .

En d'autres termes, x est un élément de $E \cap F$ si et seulement si x est un élément de E ET x est un élément de F .

Remarques : $E \cap F = F \cap E$.

$$E \cap \emptyset = \emptyset.$$

$$E \cap \mathbb{R} = E.$$

Si I et J sont des intervalles fermés bornés, alors leur intersection est également un intervalle fermé borné.

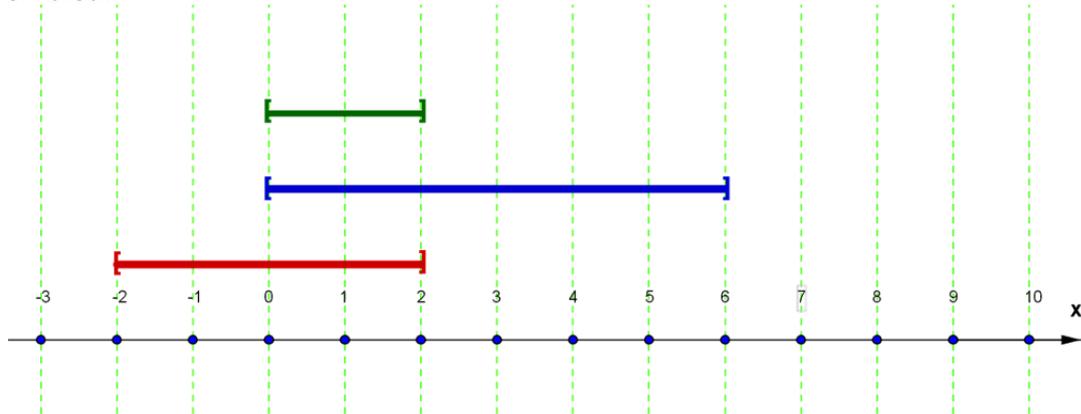
Si I et J sont des intervalles ouverts bornés, alors leur intersection est également un intervalle ouvert borné.

b) Exemples

Remarque importante :

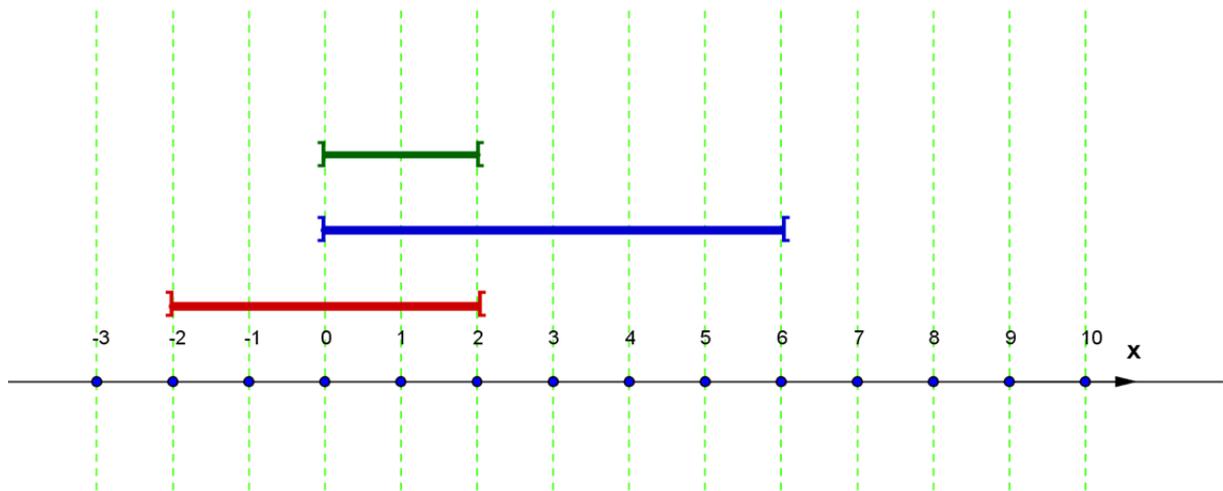
Dans tous les exemples, nous avons décalé les intervalles par rapport à l'axe gradué pour des raisons de clarté du dessin, mais en principe, la représentation graphique d'un intervalle reste toujours une partie de l'axe gradué: les intervalles dessinés ci-dessus devraient donc se trouver tous sur l'axe gradué.

Exemple 1. En vert, l'intervalle $[0; 2]$, intersection des intervalles $[-2; 2]$ en rouge et $[0; 6]$ en bleu.



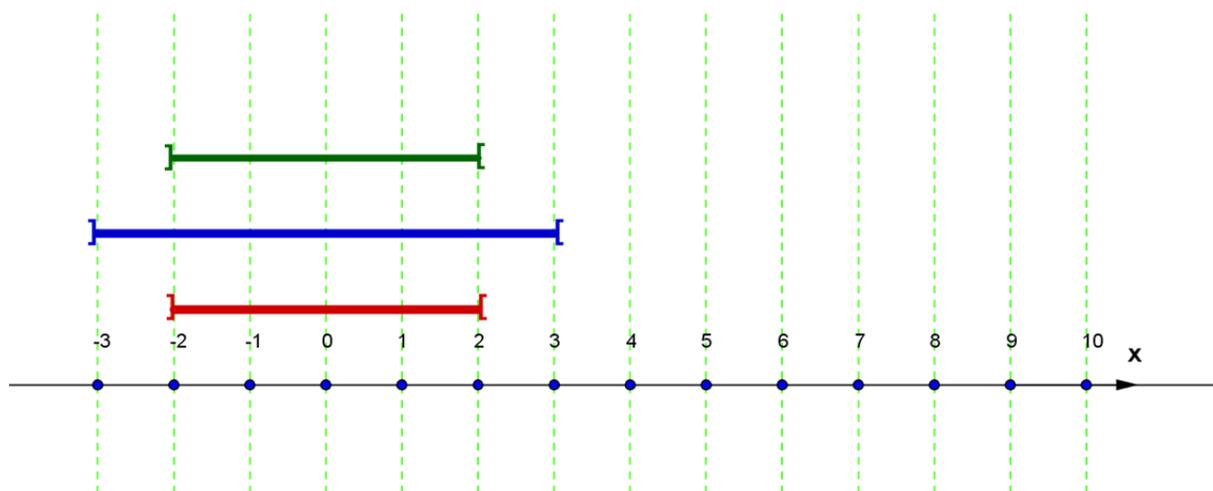
$$[-2 ; 2] \cap [0 ; 6] = [0 ; 2]$$

Exemple 2. En vert, l'intervalle $]0; 2[$, intersection des intervalles $] -2; 2[$ en rouge et $]0; 6[$ en bleu.



$$]-2 ; 2[\cap]0 ; 6[=]0 ; 2[$$

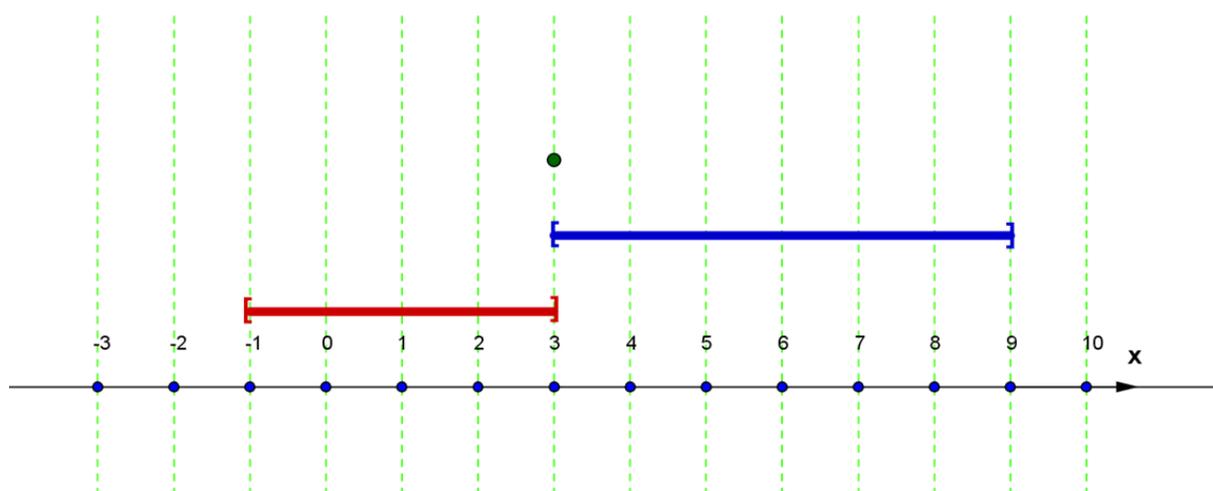
Exemple 3 : Ici, l'intersection est réduite au plus petit des deux intervalles, parce que ce plus petit intervalle est inclus dans le plus grand.



$$]-2 ; 2[\cap]-3 ; 3[=]-2 ; 2[$$

Exemple 4 : L'intervalle dessiné en vert est l'intersection de l'intervalle bleu $[3 ; 9]$ et de $[-1 ; 3]$ en rouge.

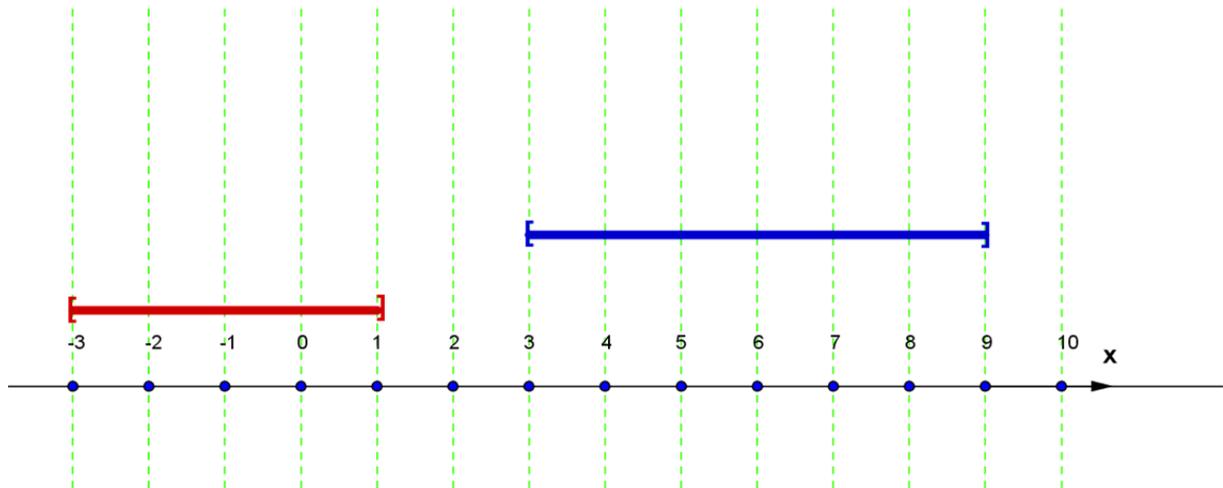
L'intersection des deux intervalles est ici réduite un point.



$$[-1 ; 3] \cap [3 ; 9] = \{ 3 \}$$

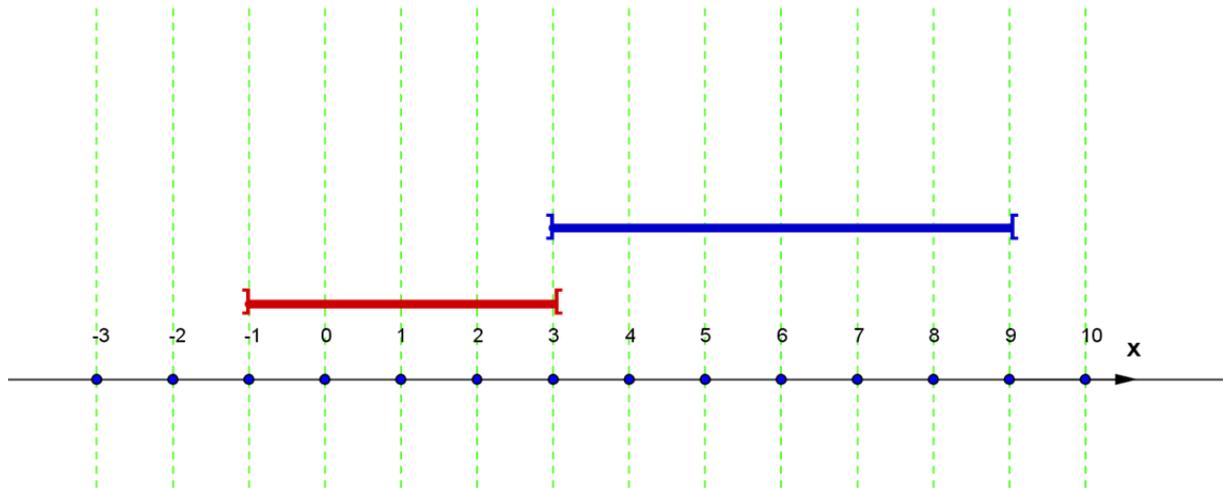
Exemple 5 :

Et ici, l'intersection de ces deux intervalles est vide :



$$[-3 ; 1] \cap [3 ; 9] = \emptyset$$

Exemple 6: Et voici une intersection d'ouverts vide !



$$]-1 ; 3[\cap]3 ; 9[= \emptyset$$

2) Réunions

a) Définition

Soit E et F deux ensembles quelconques. On appelle réunion de E et F , et on note $E \cup F$, l'ensemble des éléments qui sont soit dans E , soit dans F .

En d'autres termes, x est un élément de $E \cup F$ si et seulement si x est un élément de E **OU** x est un élément de F .

Remarques : $E \cup F = F \cup E$.

$$E \cup \emptyset = E.$$

$$E \cup \mathbb{R} = \mathbb{R}.$$

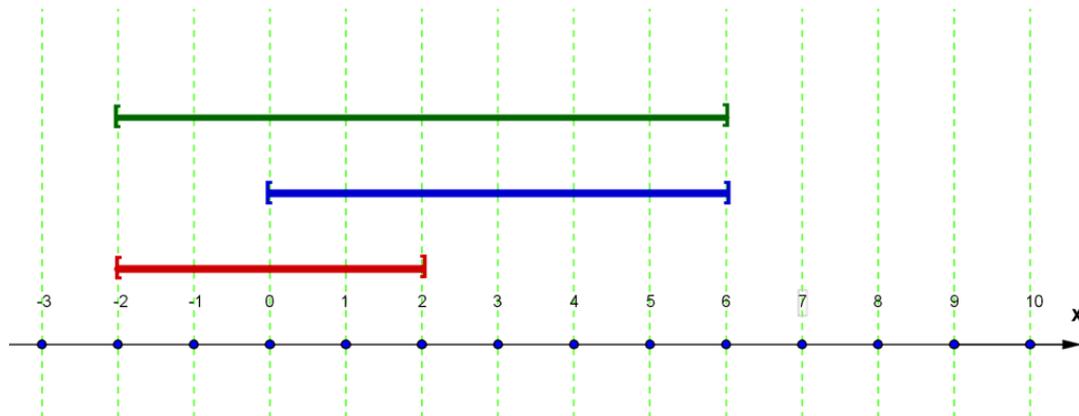
Si I et J sont des intervalles fermés bornés, alors leur réunion n'est pas systématiquement un intervalle. Par contre, la réunion de deux intervalles fermés bornés est fermée et bornée.

b) Exemples

Remarque importante :

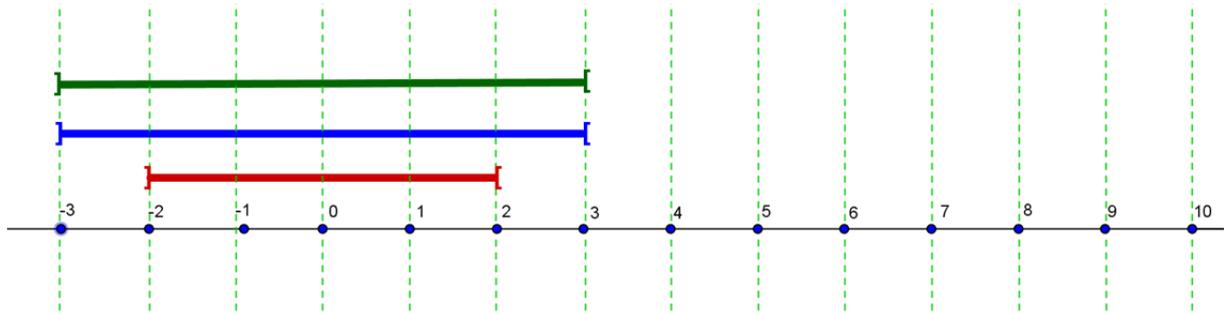
Dans tous les exemples, nous avons décalé les intervalles par rapport à l'axe gradué pour des raisons de clarté du dessin, mais en principe, la représentation graphique d'un intervalle reste toujours une partie de l'axe gradué: les intervalles dessinés ci-dessus devraient donc se trouver tous sur l'axe gradué.

Exemple 1: En vert, l'intervalle $[-2; 6]$, réunion des intervalles $[-2; 2]$ en rouge et $[0; 6]$ en bleu.



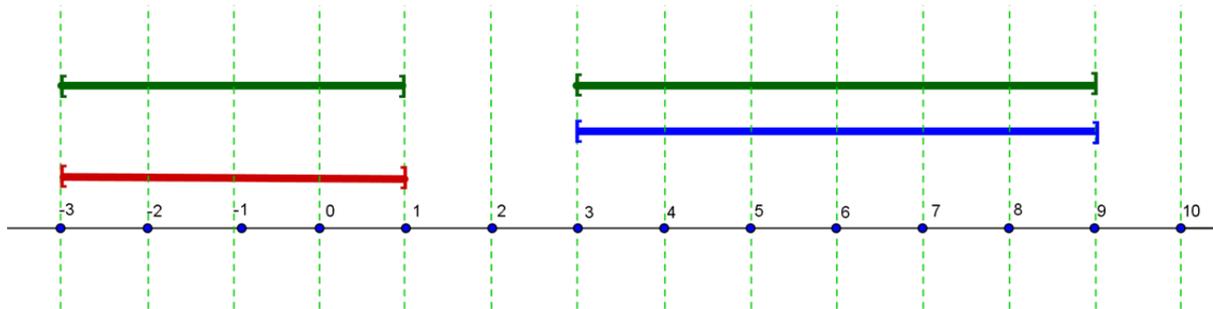
$$[-2 ; 2] \cup [0 ; 6] = [-2 ; 6]$$

Exemple 2 : Ici, la réunion est le plus grand des deux intervalles parce que le plus petit intervalle est inclus dans ce plus grand.



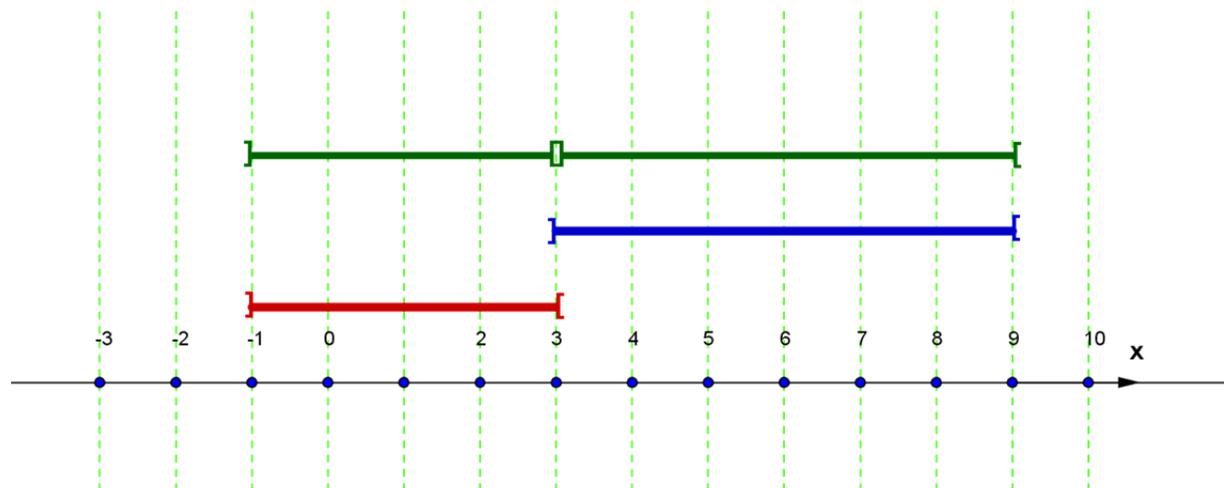
$$]-2 ; 2[\cup]-3 ; 3[=]-3 ; 3[$$

Exemple 3: Voici un exemple où on ne peut pas écrire la réunion sous la forme d'un intervalle.



$]-3 ; 1[\cup [3 ; 9]$ ne peut avoir une autre écriture : on ne peut l'écrire sous la forme d'un intervalle.

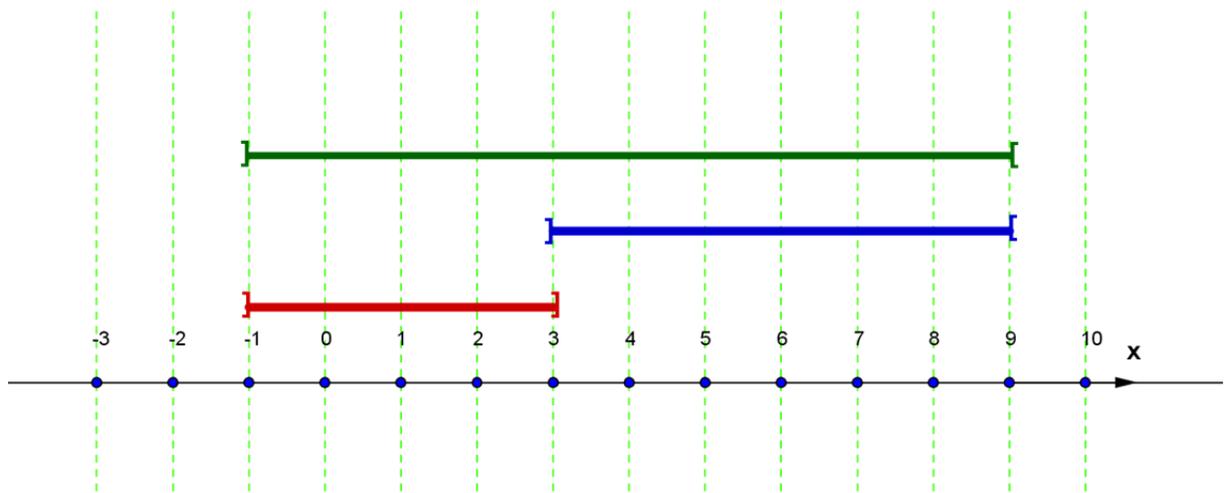
Exemple 4: Voici maintenant la réunion de deux intervalles : attention à l'absence du nombre 3 dans la réunion :



$]-1 ; 3[\cup]3 ; 9[$ Dans ce cas on ne peut pas écrire la réunion sous forme d'un intervalle.

Exemple 5:

Mais si l'une des bornes est fermée en 3, voilà ce que devient la réunion :



$$]-1 ; 3] \cup]3 ; 9[=]-1 ; 9[$$

Moralité : il faut être attentif (ou attentive) !!!

Ch. 3 : L'ordre dans IR

Partie 2 (opérations et ordre- valeur absolue –encadrement)

I. Ordre et comparaison

Comparer deux nombres réels a et b , c'est chercher à savoir quel est le plus grand (ou s'ils sont égaux).

Dire que $a < b$ équivaut à dire que $a - b < 0$.

Ainsi, comparer a et b revient à étudier le signe de $a - b$.

exemples : Soient a et b deux nombres réels, comparer $a^2 + b^2$ et $(a + b)^2$.

a) Ordre et addition

Propriété : Si $a < b$, alors $a + c < b + c$ et $a - c < b - c$

Autrement dit, ajouter (ou soustraire) un même nombre à chaque membre d'une inégalité ne change pas le sens de l'inégalité.

Propriété : Si $a < b$ et $c < d$, alors $a + c < b + d$.

En effet, si $a < b$, alors $a + c < b + c$.

De plus, si $c < d$, alors $b + c < b + d$. On en déduit $a + c < b + d$.

b) Ordre et multiplication

Propriété : Si $a < b$ et $c > 0$, alors $ac < bc$ et $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.

Si $a < b$ et $c < 0$, alors $ac > bc$ et $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.

Autrement dit, multiplier (ou diviser) chaque membre d'une inégalité,

- par un même nombre **strictement positif**, ne change pas le sens de l'inégalité.

- par un même nombre **strictement négatif**, change le sens de l'inégalité.

Propriété : Si a, b, c et d sont des réels **positifs** tels que $a < b$ et $c < d$, alors $ac < bd$.

En effet, si $a < b$, alors $ac < bc$ car $c > 0$.

De plus, si $c < d$, alors $bc < bd$ car $d > 0$. On en déduit : $ac < bd$.

c) Encadrement

Soient a, b et x trois nombres réels. On dit que a et b encadrent x lorsque $a \leq x \leq b$.

Exercice : x est un réel tel que $-1 < x < 2$. On pose $B = -2x - 3$.

Trouver un encadrement de B .

II. Inégalités sur les carrés, les racines carrées, les inverses

a) Passage au carré, à la racine carrée

Propriété : a et b étant deux nombres positifs distincts, $a < b$ équivaut à $a^2 < b^2$.

démonstration : On sait que $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. Comme a et b sont positifs, $a + b$ est aussi positif et on en déduit que $a - b$ et a^2 et b^2 sont de même signe. D'où

- si $a < b$, alors $a - b < 0$ donc $a^2 - b^2 < 0$ et $a^2 < b^2$.

- si $a^2 < b^2$, alors $a^2 - b^2 < 0$ donc $a - b < 0$ et $a < b$.

Autrement dit, deux nombres positifs sont rangés dans le même ordre que leurs carrés.

Conséquence : deux nombres positifs et leurs racines carrées sont rangés dans le même ordre.

Donc $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ équivaut à $a < b$.

b) Passage à l'inverse

Propriété : a et b étant deux nombres strictement positifs, $a < b$ équivaut à $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

Démonstration : $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ équivaut à $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} > 0$. Or $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b - a}{ab}$ et $ab > 0$, car $a > 0$

et $b > 0$.

Donc $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$ et $b - a$ sont de même signe. Donc $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} > 0$ équivaut à $b - a > 0$,

c'est à dire $a < b$.

Autrement dit, deux nombres strictement positifs sont rangés dans l'ordre contraire de leur inverse.

Exercice : x est un réel tel que $2 < x < 5$. Donner un encadrement de $A = x + \frac{1}{x}$.

III. Comparaison de a , a^2 et a^3 lorsque $a > 0$

Propriété : a est un réel strictement positif.

1. Si $a > 1$, alors $a^3 > a^2 > a$; 2. si $a < 1$, alors $a^3 < a^2 < a$.

Démonstration : De l'hypothèse $a > 1$, on déduit d'une part que $a^2 > a$ (on multiplie les deux membres par

$a > 0$) et d'autre part que $a^3 > a^2$ (on multiplie par $a > 0$). Donc $a^3 > a^2 > a$.

De la même façon, lorsque $0 < a < 1$, on démontre que $a^3 < a^2 < a$.

Remarque : pour $a = 0$ et $a = 1$, $a = a^2 = a^3$.

Exercice : x est un réel tel que $3 < x < 4$. On pose $A = 4 - x$.
 Comparer les nombres A , A^2 et A^3 .

IV. Valeur absolue

a) Distance entre deux réels

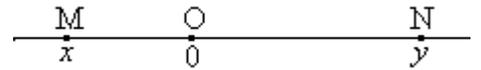
Définition : La **distance** entre deux réels x et y est la différence entre le plus grand et le plus petit. Cette distance est notée $|x - y|$ ou encore $|y - x|$.
 $|x - y|$ se lit « valeur absolue de x moins y ».

Exemples : • $|3 - 5|$ est la distance entre les réels 3 et 5. Cette distance est égale à $5 - 3 = 2$.

• $|-2 - 3|$ est la distance entre les réels -2 et 3. Cette distance est égale à $3 - (-2) = 5$.

Interprétation graphique de $|x - y|$

Sur une droite graduée d'origine O , notons M le point d'abscisse x et N le point d'abscisse y .



$|x - y|$ est la distance entre les points M et N , c'est à dire MN .

Application : Soient A , B et M trois points distincts d'une droite graduée. On note a , b et x les abscisses respectives des points A , B et M .

L'égalité $|x - a| = |x - b|$ se traduit par $MA = MB$, avec A , B et M alignés : cela signifie que M est le milieu du segment $[AB]$.

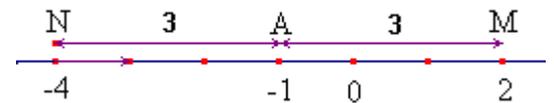
Exercice : Trouver tous les nombres x tels que $|x + 1| = 3$.

A et M sont les points d'abscisses respectives -1 et x sur une droite graduée :

$$AM = |x - (-1)| = |x + 1|$$

Trouver tous les nombres x tels que $|x + 1| = 3$ revient donc à trouver les abscisses des points M de la droite graduée tels que $AM = 3$.

Les nombres cherchés sont donc : 2 et -4 .



b) Valeur absolue d'un réel

Lorsque $y = 0$, $|x - y| = |x|$. Le nombre réel $|x|$ est alors la distance entre x et 0.

$$\text{Donc : } |x| = \begin{cases} x & \text{lorsque } x \geq 0 \\ -x & \text{lorsque } x < 0 \end{cases}$$

Exemples : $|5| = 5$ car 5 est un nombre positif. $|-3| = 3$ car -3 est un nombre négatif.

Si x est un nombre réel, $|x^2| = x^2$ car $x^2 \geq 0$.

Propriétés :

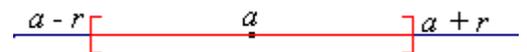
1. Dire que $|x| = 0$ équivaut à dire que $x = 0$.
2. $|-x| = |x|$.
3. Dire que $|x| = |y|$ équivaut à dire que $x = y$ ou $x = -y$.

c) L'inégalité $|x - a| \leq r$ (a et r fixés, $r > 0$)

Propriété : a est un réel, r est un réel strictement positif.

Dire que $|x - a| \leq r$ équivaut à dire que x appartient à l'intervalle $[a - r; a + r]$.

Démonstration : $|x - a| \leq r$ signifie que la distance de x à a est inférieure ou égale à r , c'est à dire que x appartient à l'ensemble représenté en rouge sur la figure ci-contre.



Donc $|x - a| \leq r$ équivaut à dire que x appartient à $[a - r; a + r]$ donc équivaut à dire que

$$a - r \leq x \leq a + r.$$

V. Encadrement d'un nombre.

i. Définition:

Soit x un nombre donné. Réaliser un encadrement de x , c'est trouver deux nombres a et b tels que $a \leq x \leq b$. Le nombre $b - a$ est l'amplitude de cet encadrement.

Exemples:

Donner un encadrement de $\sqrt{3}$ d'amplitude 1, de π d'amplitude 0,1.

ii. Encadrement d'une somme, d'un produit.

Règle 1: Si $a \leq b$ et $c \leq d$ alors $a + c \leq b + d$.

Règle 2: Si $0 \leq a \leq b$ et $0 \leq c \leq d$ alors $0 \leq ac \leq bd$.

VI. Valeur approchée d'un nombre.

Définition:

Soit a et x deux nombres et ε un nombre strictement positif. On dit que a est une valeur approchée (ou approximation) du nombre x à ε près (ou à la précision ε) lorsque $|x - a| \leq \varepsilon$.

Définition:

Soit a et x deux nombres et ε un nombre strictement positif. On dit que a est une valeur approchée (ou approximation) du nombre x à ε près (ou à la précision ε), par défaut, lorsque $a \leq x \leq a + \varepsilon$. a est une valeur approchée de x à ε près, par excès, lorsque $a - \varepsilon \leq x \leq a$.