Professeur : Rachid BELEMOU **Lycée** : Oued Eddahab	**COURS** **L'ordre dans IR**	**Niveau :** TCT - BIOF **Année :** 2017-2018

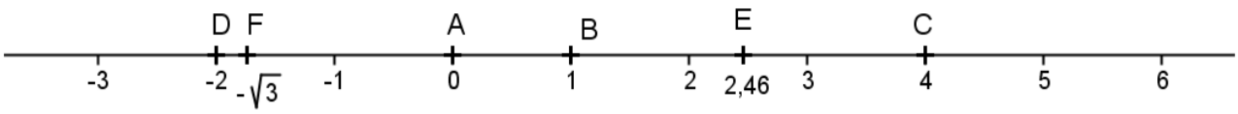
I) Les intervalles de ℝ

1) Définitions

a) Représentation graphique de ℝ

L'ensemble des nombres réels est habituellement représenté sous la forme d'une droite graduée : à chaque point de la droite est associé un unique nombre réel appelé abscisse de ce point

Exemple :



Les abscisses des points A, B , C , D , E et F sont respectivement :
$x_A = 0$; $x_B = 1$; $x_C = 4$; $x_D = -2$; $x_E = 2{,}46$ et $x_F = -\sqrt{3}$

b) Les intervalles de ℝ

Un intervalle de ℝ est représenté par un segment, une demi-droite ou par la droite toute entière. Chaque intervalle est associé à une inégalité ou un encadrement concernant les abscisses des points de la droite appartenant à ce segment ou cette demi-droite.

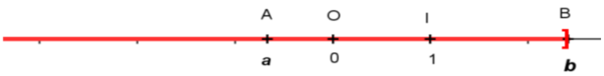
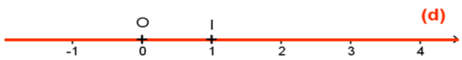
2) Tableau récapitulatif des neufs intervalles de ℝ

Soit A et B deux points de la droite d'abscisses respectives *a* et *b* (*a* < *b*) et soit M un point de la droite d'abscisse *x*

On obtient donc Les neuf types d'intervalles sont dans le tableau ci-dessous: :

Remarques :

- On dit qu'un intervalle est **fermé** si ses extrémités lui appartiennent.
Par exemple :[6 ; 12] ou [-2 ; + ∞ [sont des intervalles fermés.
- On dit qu'un intervalle est **ouvert** si ses extrémités ne lui appartiennent pas
Par exemple :] -4 ; 7 [ou] - ∞ ; 3 [sont des intervalles ouverts.
- L'ensemble ℝ **est aussi un intervalle**, il peut se noter] -∞ ; + ∞[
- L'ensemble ne contenant **aucun réel est aussi un intervalle**, c'est **l'intervalle vide, il se note Ø**
- Le symbole **∞** se lit **infini.**

M	Nombres x	Représentation graphique	Notation intervalle
$M \in [AB]$	$a \leq x \leq b$	 **Intervalle fermé borné**	**[a ; b]**
$M \in]AB[$	$a < x < b$	 **Intervalle ouvert borné**	**] a ; b [**
$M \in [AB[$	$a \leq x < b$	 **Intervalle semi-ouvert à droite, borné**	**[a ; b [**
$M \in]AB]$	$a < x \leq b$	 **Intervalle semi-ouvert à gauche, borné**	**] a ; b]**
$M \in [AB)$	$x \geq a$	 **Intervalle fermé infini**	**[a ; +∞ [**
$M \in]AB)$	$x > a$	 **Intervalle ouvert infini**	**] a ; +∞ [**
$M \in [BA)$	$x \leq b$	 **Intervalle fermé infini**	**] - ∞ ; b]**
$M \in]BA)$	$x < b$	 **Intervalle ouvert infini**	**] - ∞ ; b [**
$M \in (d)$	$x \in R$		**] - ∞ ; +∞[**

II) Intersections et réunions d'intervalles

1) Intersections

<u>Définition</u> :

Soit E et F deux ensembles quelconques. On appelle intersection de E et F, et on note $E \cap F$, l'ensemble des éléments qui sont communs à E et F.

En d'autres termes, x est un élément de $E \cap F$ si et seulement si x est un élément de E et x est un élément de F.

Remarques : $E \cap F = F \cap E$.

$E \cap \emptyset = \emptyset$.

$E \cap \mathbb{R} = E$.

Si I et J sont des intervalles fermés bornés, alors leur intersection est également un intervalle fermé borné.

Si I et J sont des intervalles ouverts bornés, alors leur intersection est également un intervalle ouvert borné.

2) Réunions

Définition :

Soit E et F deux ensembles quelconques. On appelle réunion de E et F, et on note $E \cup F$, l'ensemble des éléments qui sont soit dans E, soit dans F.

En d'autres termes, x est un élément de $E \cup F$ si et seulement si x est un élément de E ou x est un élément de F.

Remarques : $E \cup F = F \cup E$.

$E \cup \emptyset = E$.

$E \cup \mathbb{R} = \mathbb{R}$.

Si I et J sont des intervalles fermés bornés, alors leur réunion n'est pas systématiquement un intervalle. Par contre, la réunion de deux intervalles fermés bornés est fermée et bornée.

Exercice d'application :(5,9 - série)

III. Ordre et comparaison

Comparer deux nombres réels a et b, c'est chercher à savoir quel est le plus grand (ou s'ils sont égaux).

Dire que $a < b$ équivaut à dire que $a - b < 0$.

Ainsi, comparer a et b revient à étudier le signe de $a - b$.

exemples : Soient a et b deux nombres réels, comparer $a^2 + b^2$ et $(a + b)^2$.

a) Ordre et addition

Propriété : Si $a < b$, alors $a + c < b + c$ et $a - c < b - c$

Autrement dit, ajouter (ou soustraire) un même nombre à chaque membre d'une inégalité ne change pas le sens de l'inégalité.

Propriété : Si $a < b$ et $c < d$, alors $a + c < b + d$.

En effet, si $a < b$, alors $a + c < b + c$.

De plus, si $c < d$, alors $b + c < b + d$. On en déduit $a + c < b + d$.

b) Ordre et multiplication

Propriété : Si $a < b$ et $c > 0$, alors $ac < bc$ et $a/c < b/c$

Si $a < b$ et $c < 0$, alors $ac > bc$ et $a/c > b/c$

Autrement dit, multiplier (ou diviser) chaque membre d'une inégalité,

- par un même nombre strictement positif, ne change pas le sens de l'inégalité. - par un même nombre strictement négatif, change le sens de l'inégalité.

Propriété : Si a, b, c et d sont des réels positifs tels que $a < b$ et $c < d$, alors $ac < bd$.

En effet, si $a < b$, alors $ac < bc$ car $c > 0$.

De plus, si $c < d$, alors $bc < bd$ car $d > 0$. On en déduit : $ac < bd$.

Exercice d'application :(1,2 - série)

c) Encadrement

Soient a, b et x trois nombres réels. On dit que a et b encadrent x lorsque $a \leq x \leq b$.

Exercice : x est un réel tel que $-1 < x < 2$. On pose $B = -2x - 3$.

Trouver un encadrement de B.

III. Inégalités sur les carrés, les racines carrées, les inverses

a) Passage au carré, à la racine carrée

Propriété : *a* et *b* étant deux nombres positifs distincts, $a < b$ équivaut à $a^2 < b^2$.

démonstration : On sait que $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. Comme *a* et *b* sont positifs, $a + b$ est aussi positif et on en déduit que $a - b$ et a^2 et b^2 sont de même signe. D'où

- si $a < b$, alors $a - b < 0$ donc $a^2 - b^2 < 0$ et $a^2 < b^2$.
- si $a^2 < b^2$, alors $a^2 - b^2 < 0$ donc $a - b < 0$ et $a < b$.

Autrement dit, deux nombres positifs sont rangés dans le même ordre que leurs carrés.

Conséquence : deux nombres positifs et leurs racines carrées sont rangés dans le même ordre.
Donc : $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ équivaut à $a < b$.

Exercice d'application :(15 - série)

b) Passage à l'inverse

Propriété : *a* et *b* étant deux nombres strictement positifs, $a < b$ équivaut à $1/b<1/a$

Démonstration :

Autrement dit, deux nombres strictement positifs sont rangés dans l'ordre contraire de leur inverse.

Exercice : *x* est un réel tel que $2 < x < 5$. Donner un encadrement de $A = x + 1/x$

IV. Comparaison de a, a² et a³ lorsque a > 0

Propriété : *a* est un réel strictement positif.

1. Si $a > 1$, alors $a^3 > a^2 > a$; 2. si $a < 1$, alors $a^3 < a^2 < a$.

Démonstration : De l'hypothèse $a > 1$, on déduit d'une part que $a^2 > a$ (on multiplie les deux membres par $a > 0$) et d'autre part que $a^3 > a^2$ (on multiplie par $a^2 > 0$). Donc $a^3 > a^2 > a$.
De la même façon, lorsque $0 < a < 1$, on démontre que $a^3 < a^2 < a$.

Remarque : pour $a = 0$ et $a = 1$, $a = a^2 = a^3$

Exercice : x est un réel tel que $3 < x < 4$. On pose $A = 4 - x$.
Comparer les nombres A, A^2 et A^3.

IV. Valeur absolue

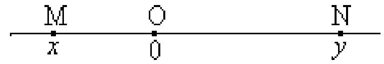
a) Distance entre deux réels

Définition : La distance entre deux réels *x* et *y* est la différence entre le plus grand et le plus petit. Cette distance est notée $|x-y|$ ou encore $|y-x|$.
$|x-y|$ se lit « valeur absolue de *x* moins *y* ».

Exemples :
- $|3-5|$ est la distance entre les réels 3 et 5. Cette distance est égale à 5 – 3 = 2.
- $|-2-3|$ est la distance entre les réels –2 et 3. Cette distance est égale à 3 – (-2) = 5.

Interprétation graphique de $|x - y|$

Sur une droite graduée d'origine O, notons M le point d'abscisse x et N le point d'abscisse y.



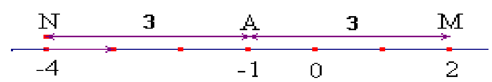
$|x - y|$ est la distance entre les points M et N, c'est à dire MN.

Application : Soient A, B et M trois points distincts d'une droite graduée. On note a, b et x les abscisses respectives des points A, B et M.

L'égalité $|x - a| = |x - b|$ se traduit par MA = MB, avec A, B et M alignés : cela signifie que M est le milieu du segment [AB].

Exercice : Trouver tous les nombres x tels que $|x + 1| = 3$.

A et M sont les points d'abscisses respectives −1 et x sur une droite graduée :



AM = $|x - (-1)| = |x + 1|$

Trouver tous les nombres x tels que $|x + 1| = 3$ revient donc à trouver les abscisses des points M de la droite graduée tels que AM = 3. Les nombres cherchés sont donc : 2 et −4.

b) Valeur absolue d'un réel

Lorsque $y = 0$, $|x - y| = |x|$. Le nombre réel $|x|$ est alors la distance entre x et 0.

Donc : $|x| = \begin{cases} x & \text{lorsque } x \geq 0 \\ -x & \text{lorsque } x < 0 \end{cases}$

Exemples : $|5| = 5$ car 5 est un nombre positif. $|-3| = 3$ car -3 est un nombre négatif.

Si x est un nombre réel, $|x^2| = x^2$ car $x^2 \geq 0$.

Propriétés :

1. Dire que $|x| = 0$ équivaut à dire que $x = 0$.
2. $|-x| = |x|$.
3. Dire que $|x| = |y|$ équivaut à dire que $x = y$ ou $x = -y$.

Exercice d'application :(8 (1) - série)

c) L'inégalité $|x - a| \leq r$ (a et r fixés, $r > 0$)

Propriété : a est un réel, r est un réel strictement positif.

Dire que $|x - a| \leq r$ équivaut à dire que x appartient à l'intervalle $[a - r\,;\, a + r]$.

Démonstration : $|x-a|\leq r$ signifie que la distance de x à a est inférieure ou égale à r, c'est à dire que x appartient à l'ensemble représenté en rouge sur la figure ci-contre.

Donc $|x-a|\leq r$ équivaut à dire que x appartient à $[a-r; a+r]$ donc équivaut à dire que $a-r\leq x\leq a+r$.

Exercice d'application :(8 (2) - série)

VII. Encadrement d'un nombre.

1-Définition:

Soit x un nombre donné. Réaliser un encadrement de x, c'est trouver deux nombres a et b tels que $a\leq x\leq b$. Le nombre b-a est l'amplitude de cet encadrement.

Exemples:

Donner un encadrement de $\sqrt{3}$ d'amplitude 1, de π d'amplitude 0,1.

2-Encadrement d'une somme, d'un produit.

Règle 1: Si $a\leq b$ *et* $c\leq d$ alors $a+c\leq b+d$

Règle 2: Si $0\leq a\leq b$ *et* $0\leq c\leq d$ alors $0\leq ac\leq bd$.

.

VI. Valeur approchée d'un nombre.

Définition 1:

Soit a et x deux nombres et ε un nombre strictement positif. On dit que a est une valeur approchée (ou approximation) du nombre x à ε près (ou à la précision ε) lorsque $|x-a|\leq\varepsilon$

Définition 2:

Soit a et x deux nombres et ε un nombre strictement positif. On dit que a est une valeur approchée (ou approximation) du nombre x à ε près (ou à la précision ε), par défaut, lorsque $a\leq \dot{x}\leq a+\varepsilon$. a est une valeur approchée de x à ε près, par excès, lorsque a- ε $\leq x\leq a$.

Exercice d'application :(11,12,16,17- série)