

✂ Exercice 01 ✂

Comparer les nombres A et B dans les cas suivants :

- 1) $A = 1 + 3\sqrt{2}$; $B = 3\sqrt{3}$
- 2) $A = -5\sqrt{3}$; $B = -6\sqrt{2}$
- 3) $A = \frac{x}{x+1}$; $B = \frac{y}{y+1}$ ($0 < x < y$)
- 4) $A = \frac{x^2 + x}{x^2 + x + 1}$; $B = \frac{y^2 + y}{y^2 + y + 1}$ ($0 < x < y$)
- 5) $A = \sqrt{a-b}$; $B = \sqrt{a}-\sqrt{b}$ ($0 < b < a$)
- 6) $A = \frac{1}{(x+1)(x+4)}$; $B = \frac{1}{(x+2)(x+3)}$ ($0 < x$)
- 7) $A = 1 + \frac{1}{n}$; $B = \frac{1}{1 + \frac{1}{n}}$ ($n \in \mathbb{N}^*$)

✂ Exercice 02 ✂

Soient : $A = 3\sqrt{18} - \sqrt{72} + 2\sqrt{\frac{9}{2}}$ et $B = \sqrt{28} + \sqrt{32} - 2\sqrt{2}$.

- ① Montrer que : $A - B = 4\sqrt{2} - 2\sqrt{7}$.
- ② Comparer A et B .

✂ Exercice 03 ✂

On considère les nombres a et b tels que :

$$a = 2\sqrt{5} - 3\sqrt{2} \quad \text{et} \quad b = \sqrt{39 - 12\sqrt{10}}$$

- ① Montrer que $a \geq 0$.
- ② Calculer a^2 et b^2 .
- ③ Comparer a et b puis $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$.

✂ Exercice 04 ✂

Soient a et b deux nombres réels tels que : $a \geq 2$ et $b \geq 2$.

On pose : $x = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ et $y = \sqrt{ab} + 1$.

- ① Montrer que : $x^2 - y^2 = (a-1)(1-b)$.
- ② Comparer x et y .
- ③ Application : comparer les nombres $\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1$ et $\sqrt{6}$.

✂ Exercice 05 ✂

Soient x et y deux nombres réels strictement positifs tels que : $x^2 + y^2 = 2$.

- ① Montrer $(x+y)^2 = 2(1+xy)$.
- ② En déduire que : $x+y > \sqrt{2}$.

✂ Exercice 06 ✂

- ① Soit a un nombre réel tel que : $a \geq 1$.
Montrer que : $a^2 \geq a$.
- ② Soient x et y deux nombres réels tels que : $x \geq 1$ et $y \geq 1$.
Montrer que : $x+y \leq 2xy$.

✂ Exercice 07 ✂

Soient x et y deux nombres réels. Montrer que :

$$x^2 + y^2 \geq 2xy \quad ; \quad (x+y)^2 \geq 4xy \quad ; \quad \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \leq \frac{x^2 + y^2}{2}$$

✂ Exercice 08 ✂

Soient x et y deux nombres réels strictement positifs.

Montrer que : $x+y \geq 2\sqrt{xy}$; $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$.

✂ Exercice 09 ✂

Soient a , b et c trois nombres réels.

On pose : $A = a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc$.

- ① Montrer que : $2A = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$.
- ② En déduire que : $ab + ac + bc \leq a^2 + b^2 + c^2$.

✂ Exercice 10 ✂

Soient a et b deux nombres réels tels que :

$$3 \leq a \leq 9 \quad \text{et} \quad 2 \leq b \leq 7.$$

Encadrer les expressions suivantes :

$$\begin{array}{l}
 a+b \quad ; \quad a-b \quad ; \quad 2a+3b \quad ; \quad 2a-5b; \\
 \frac{a}{b} \quad ; \quad \frac{2a+3b}{2a-5b} \quad ; \quad a^2 + b^2.
 \end{array}$$

✂ Exercice 11 ✂

Soient x et y deux nombres réels tels que :

$$-4 \leq x \leq -1 \quad \text{et} \quad 3 \leq y \leq 5.$$

Encadrer les expressions suivantes :

$$x+y \quad ; \quad x-y \quad ; \quad xy \quad ; \quad \frac{x^2}{y^2 - 2xy}$$

✂ Exercice 12 ✂

Soient x et y deux nombres réels tels que :

$$-2 \leq x \leq 2 \quad \text{et} \quad 5 \leq y \leq 9.$$

Encadrer les expressions suivantes :

$$x+y \quad ; \quad x-y \quad ; \quad xy \quad ; \quad \frac{x}{y}$$

✂ Exercice 13 ✂

Soit x un nombre réel tel que : $5 \leq x \leq 7$.

On pose : $A = x^2 - 2x - 8$.

- ① Encadrer l'expression A .
- ② a) Vérifier que : $A = (x-4)(x+2)$.
b) En déduire un autre encadrement de A .
- ③ a) Vérifier que : $A = (x-1)^2 - 9$.
b) En déduire un autre encadrement de A .
- ④ Quel est le meilleur encadrement de A ?

✂ Exercice 14 ✂

Soient x et y deux nombres réels tels que : $1 \leq x \leq 2$ et $\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{3}{2}$.

On pose : $A = x^2 - y^2 + x + y$.

- ① Encadrer l'expression A .

- ② a) Vérifier que : $A = (x + y)(x - y + 1)$.
 b) En déduire un autre encadrement de A .
- ③ Déduire que : $\frac{3}{4} \leq A \leq \frac{29}{4}$.

🐞 Exercice 15 🐞

Écrire, sans le symbole de la valeur absolue, les nombres suivants :

- $A = |3 - \pi| + |2^{-3}| + |-\pi\sqrt{2} - 1| - |2^{-3} - 6|$.
- $B = \left| \frac{3}{\sqrt{15+5}} \right| + \left| \frac{1}{\sqrt{15-5}} \right|$.
- $C = |2x - 3| + \sqrt{(2x - 3)^2}$, tel que : $x \in \mathbb{R}$.

🐞 Exercice 16 🐞

Soient x et y deux nombres réels tels que :

$$\left| x - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad |y| \leq \frac{1}{2}.$$

Montrer que : $1 < \frac{2x}{x - y} < 5$.

🐞 Exercice 17 🐞

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

- ① On considère le nombre $A = \sqrt{6 - \sqrt{11}} - \sqrt{6 + \sqrt{11}}$.
- a) Déterminer le signe de A .
 b) Calculer A^2 puis déduire la valeur de A .
- ② On considère le nombre $B = (\sqrt{6} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - 2)(\sqrt{\sqrt{3} + 2})$.
- a) Montrer que : $B^2 = 4$.
 b) En déduire la valeur de B .
- ③ On considère le nombre $C = \sqrt{x^2 + 2x + 1} + \sqrt{x^2 - 2x + 1}$.
 Sachant que $x \in [-1, 1]$, simplifier le nombre C .

🐞 Exercice 18 🐞

Soient a et b deux nombres réels tels que :

$$a \geq -2 \quad \text{et} \quad b \leq -1 \quad \text{et} \quad a - b = 6.$$

- ① Calculer le nombre : $A = \sqrt{(a+2)^2} + \sqrt{(b+1)^2}$.
- ② Montrer que : $a \leq 5$ et $b \geq -8$.
- ③ Déterminer la valeur du nombre : $B = |a+b-4| + |a+b+10|$.

🐞 Exercice 19 🐞

Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

- 1) $|2x - 3| = 8$; 2) $|x - \frac{2}{3}| = -1$;
 3) $|x + 8| = |2x - 1|$; 4) $||x| - 3| = |4x + 5|$;
 5) $|x + 2| = |x - 3|$.

🐞 Exercice 20 🐞

Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivantes :

- 1) $|x| \leq 3$; 2) $|x| \geq 3$;
 3) $|1 - x| \geq 4$; 4) $|7 - 2x| > 1$;
 5) $1 \leq |x + 2| \leq 2$.

🐞 Exercice 21 🐞

Soient a et b deux nombres réels tels que :

$$a < 3 \quad \text{et} \quad 0 < b < \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad ab = 1.$$

- ① Montrer que : $2 < a < 3$.
- ② En déduire que : $\frac{1}{3} < b < \frac{1}{2}$.
- ③ Montrer que : $\frac{3}{7} < \frac{1}{a-2b} < 1$.
- ④ Vérifier que $\frac{5}{7}$ est une valeur approchée de $\frac{1}{a-2b}$ à $\frac{2}{7}$ près.

🐞 Exercice 22 🐞

Soient a et b deux nombres réels tels que : $0 < a < 1$ et $b = \frac{1 + \sqrt{a}}{2}$.

- ① Montrer que : $\frac{1}{2} < b < 1$.
- ② Montrer que : $b - 1 = \frac{a - 1}{2(1 + \sqrt{a})}$.
- ③ En déduire que : $|b - 1| < \frac{1}{2}|a - 1|$.
- ④ Déduire une valeur approchée de $\frac{1 + \sqrt{0,6}}{2}$ à 2×10^{-2} près.

🐞 Exercice 23 🐞

Soit $x \in \mathbb{R}^*$.

On pose : $E = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$.

- ① Montrer que : $E - \frac{1}{x} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2} + 1}$.
- ② a) Montrer que $\sqrt{1+x^2} + 1 \geq 2$.
 b) En déduire que : $|E - \frac{1}{x}| < \frac{1}{2}|x|$.
- ③ Déterminer une valeur approchée au nombre $\frac{\sqrt{0,0001}}{0,01}$ à 5×10^{-3} près.

🐞 Exercice 24 🐞

Soit $a \in \mathbb{R}^*$.

- ① a) Montrer que : $1 + \sqrt{1+a} > 2$.
 b) En déduire que : $0 < \frac{1}{1 + \sqrt{1+a}} < \frac{1}{2}$.
 c) Montrer que : $1 < \sqrt{1+a} < 1 + \frac{a}{2}$.
 d) Donner un encadrement du nombre $\sqrt{1,04}$.
- ② a) Montrer que : $\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{a+1}} = \sqrt{a+1} - \sqrt{a}$.
 b) En déduire la valeur de la somme :

$$S = \frac{1}{1 + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99} + \sqrt{100}}$$

🐞 Exercice 25 🐞

Soit $n \in \mathbb{N}$.

- ① Montrer que : $\frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+2}$.
- ② On considère les nombres : $A = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \dots \times \frac{97}{98} \times \frac{99}{100}$
 et $B = \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{7} \times \dots \times \frac{96}{97} \times \frac{98}{99}$.
- a) Montrer que : $A < B$.
 b) Calculer le produit $A \times B$.
 c) En déduire que : $A < \frac{1}{10} < B$.