

$$\cos x - (\sqrt{2}-1)\sin x = \sqrt{2}-\sqrt{2}$$

EXERCICE 5

1- montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad |\sin x + \cos x| \leq \sqrt{2}$

2- on considère l'équation

$$(E) : 1 + \cos^3 x + \sin^3 x = \frac{3}{2} \sin 2x$$

a) on pose $y = \sin x + \cos x$ calculer $\sin x \cos x$ et $\sin^3 x + \cos^3 x$ en fonction de y

b) montrer que $(E) \Leftrightarrow (y+1)(y^2+2y-5)=0$

3- résoudre dans \mathbb{R} l'équation (E)

EXERCICE 6

On pose $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} \sin\left(\frac{k\pi}{3}\right)$ pour tout n de \mathbb{N}^*

a) montrer que

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \sin\left(\frac{k\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \left[\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{6}\right) - \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{6}\right) \right]$$

b) montrer que

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \times S_n = \frac{1}{2} \left[\cos\frac{\pi}{6} - \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{6}\right) \right]$$

c) déduire $S_n = 2 \sin\left(\frac{n\pi}{6}\right) \sin\left(\frac{(n+1)\pi}{6}\right)$ ($\forall n \in \mathbb{N}^*$)

EXERCICE 7

On pose $T_n = \sum_{k=0}^{k=n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ pour tout $n \geq 2$

1) calculer T_2 et T_3

2) a) montrer que $T_n \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) = T_n - \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$

b) en déduire que $T_n = \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$ ($\forall n \geq 2$)

EXERCICE 8

On pose $F(x) = \cos 3x + \cos 2x$

1) calculer $F\left(\frac{\pi}{5}\right)$

2) vérifier que $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

3) en déduire que

$$F(x) = (1 + \cos x)(4\cos^2 x - 2\cos x - 1)$$

4) déterminer la valeur de $\cos\frac{\pi}{5}$



EXERCICE 1

$$\text{On pose } A = \frac{\cos\frac{\pi}{18} - \sqrt{3}\sin\frac{\pi}{18}}{\cos\frac{\pi}{18} \sin\frac{\pi}{18}}$$

1. Montrer que $\cos\frac{\pi}{18} - \sqrt{3}\sin\frac{\pi}{18} = 2\cos\frac{7\pi}{18}$

2. Montrer que $\cos\frac{\pi}{18} \sin\frac{\pi}{18} = \frac{1}{2} \sin\frac{\pi}{9}$

3. En déduire que $A = 4$

EXERCICE 2

$$\text{On pose } \alpha = \frac{\pi}{10}$$

1) vérifier que $\sin 2\alpha = \cos 3\alpha$

2) Montrer que $\cos 3\alpha = \cos \alpha (1 - 4\sin^2 \alpha)$

3) En déduire $\sin\frac{\pi}{10}$ et $\cos\frac{\pi}{10}$

4) Calculer $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{10}$ puis montrer que

$$\sin\frac{7\pi}{30} = \frac{1}{8} (\sqrt{30+6\sqrt{5}} + 1 - \sqrt{5})$$

EXERCICE 3

On considère dans \mathbb{R} l'équation

$$(E) \quad 8X^3 - 6X - 1 = 0$$

1. montrer que $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

2. résoudre dans $[0, 2\pi[$ l'équation

$$\cos 3x = \frac{1}{2}$$

3. en déduire les solutions de (E)

4. déterminer les valeurs de

$$a = \cos\frac{\pi}{9} + \cos\frac{7\pi}{9} + \cos\frac{13\pi}{9}$$

$$\text{et } b = \cos\frac{\pi}{9} \cos\frac{7\pi}{9} \cos\frac{13\pi}{9}$$

EXERCICE 4

Soit α de $]0, \frac{\pi}{2}[$ tel que $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2}$

1. montrer que $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

2. a) vérifier que $\cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha$

b) en déduire que $\cos 3\alpha = \sin \alpha$

3. résoudre dans \mathbb{R} l'équation

$$\cos 3x = \sin x \quad \text{en déduire que } \alpha = \frac{\pi}{8}$$

4. résoudre dans \mathbb{R} l'équation