EQUATIONS DIFFERENTIELLES

I) DEFINITIONS ET NOTATIONS.

1) Définition :

Définition :

Une équation différentielle d'ordre n est une relation entre la variable réelle x, une fonction **inconnue** $\boldsymbol{x \mapsto y(x)}$ et ses dérivées d'ordre inférieure ou égale à n.

Remarque :

Pour s'simplifier l'écriture d'une équation différentielle on note l'inconnu (qui est une fonction) y au lieu de $y(x)$.

Exemples :

- L'équation différentielle : $y' = sin(2x)$ à pour solution les fonctions primitives de la fonction $x \mapsto sin(2x)$ qui sont : $x \mapsto \frac{-1}{2}\, cos(x) + c$
- $y' + 2y = 0$ est une équation différentielle de 1^{er} ordre sans second membre.
- $y' + 2y = 3x^2 + x$ est une équation différentielle de 1^{er} ordre avec second membre.
- $y'' - 3y' + 5y = e^x$ est une équation différentielle de $2^{éme}$ ordre avec second membre.

II) L'EQUATION $\boldsymbol{y' = ay + b}$ OU $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^*$

1) L'équation $\boldsymbol{y' = ay}$ ou $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^*$

Soit a un réel non nul et Considérons l'équation différentielle $(E)\ \ y' = ay$

$(E) \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R})(y'(x) = ay(x))$

- A noter que la fonction nulle θ $(\forall x \in \mathbb{R})(\theta(x) = 0)$ est une solution de l'équation différentielle.
- On suppose que y ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ on aura :

$$
\begin{aligned}
(E) &\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R})(y'(x) = ay(x)) \\
&\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R})\left(\frac{y'(x)}{y(x)} = a\right) \quad \text{On passe au primitives} \\
&\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R})(l\,n|y(x)| = ax + c) \\
&\Leftrightarrow (\forall\, x \in \mathbb{R})(|y(x)| = e^{ax+c} \\
&\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R})(y(x) = \pm e^{c}\, e^{ax}\,) \quad \text{où } \ c \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R})(y(x) = \lambda\, e^{ax}\,) \quad \text{où } \ \lambda \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

Et puisque même la fonction nulle θ peut s'écrire de la forme $\theta(x) = \lambda\, e^{ax}$ $(\lambda = 0)$, on peut conclure que :

Propriété :

Soit a un réel non nul et $(E)\ \ y' = ay$ une équation différentielle définie sur $\mathbb{R}$.
La solution **générale de** l'équation différentielle (E) est l'ensemble des fonctions $\boldsymbol{x \mapsto y(x) = \lambda\, e^{ax}}$ où λ est un réel.

Applications :

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. (E_1): $y' = 3y$
2. (E_2): $y' - y = 0$
3. (E_3): $3y' - 2y = 0$

2) L'équation $\boldsymbol{y' = ay + b}$ ou $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^*$ et $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}$.

Soient a un réel non nul, b un réel quelconque, Considérons l'équation différentielle $(E)\ \ y' = ay + b$

$$\begin{aligned}(E) &\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R})\left(y'(x) = a\left(y(x) + \frac{b}{a}\right)\right)\\ &\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R})\left(y(x) + \frac{b}{a}\right)' = a\left(y(x) + \frac{b}{a}\right)\\ &\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R})(z'(x) = az(x)) \quad \text{où } z(x) = y(x) + \frac{b}{a}\\ &\Leftrightarrow (\forall\, x \in \mathbb{R})\left(y(x) + \frac{b}{a} = \lambda e^{ax}\right)\\ &\Leftrightarrow (\forall\, x \in \mathbb{R})\left(y(x) = \lambda e^{ax} - \frac{b}{a}\right)\end{aligned}$$

Propriété :

Soit a un réel non nul et b un réel, (E) $y' = ay + b$ une équation différentielle définie sur $\mathbb{R}$.
La solution générale de l'équation différentielle (E) est l'ensemble des fonctions $\boldsymbol{x \mapsto y(x) = \lambda\, e^{ax} - \frac{b}{a}}$ où λ est un réel.

Remarque :

Le réel λ dans la solution générale de l'équation différentielle (E) peut-être déterminé par les conditions initiales

Exemple :

1- Résoudre l'équation différentielle $y' + 2y = 3$

2- déterminer la solution φ de (E) telle que $\varphi(1) = -1$.

Solution :

1- d'après la propriété précédente : La solution générale de l'équation différentielle (E) est l'ensemble des fonctions $\boldsymbol{x \mapsto y(x) = \lambda\, e^{-2x} + \frac{3}{2}}$ où λ est un réel.

2- φ est une solution de (E) donc $\boldsymbol{\varphi(x) = \lambda\, e^{-2x} + \frac{3}{2}}$ et puisque $\varphi(1) = -1$ alors : $\lambda\, e^{-2} + \frac{3}{2} = -1$
donc $\lambda e^{-2} = \frac{-5}{2}$ d'où $\lambda = \frac{-5e^2}{2}$ et par suite : $\varphi(x) = \frac{-5e^2}{2}\, e^{-2x} + \frac{3}{2}$

Exercice :

Considérons les équations différentielles $(E_0): y' - y = 0$ et $(E): y' - y = 2x^2 + x$

1- Résoudre l'équation différentielle (E_0)

2- a) Soit P une fonction polynôme, quel sera le degré de P affin que P soit une solution de (E)

b) Déterminer le polynôme P pour que P soit une solution de (E)

c) Montrer que : y est solution de (E) si et seulement si $(y - P)$ est solution de (E)

d) En déduire la solution générale de l'équation (E)

3) déterminer la solution φ de (E) telle que $\varphi(0) = 2$

III) LES EQUATIONS DIFFERENTIELLES : $ay'' + by' + cy = 0$

Soit a un réel non nul et b et c sont des réels quelconques.

Définition :

Considérons l'équation différentielle : $(E): ay'' + by' + cy = 0$ l'équation $(1): ar^2 + br + c = 0$ a variable réelle r s'appelle **l'équation caractéristique de l'équation différentielle (E).**

Exemple :

- l'équation caractéristique de l'équation différentielle $(E): -3y'' + 2y' - 4y = 0$ est $(1): -3r^2 + 2r - 4 = 0$
- l'équation caractéristique de l'équation différentielle $(E): y'' + y = 0$ est $(1): r^2 + 1 = 0$.

1) Résolution de l'ED (E): $ay'' + by' + cy = 0$

L'équation $ay" + by' + cy = 0$ est dite à coefficients constants car a, b et c sont des réels donnés. On supposera $a \neq 0$ (sinon, l'équation est du premier ordre).

1.1) Linéarité

L'équation $ay" + by' + cy = 0$ possède la propriété suivante :

Si y_1 et y_2 sont deux fonctions solutions de l'équation : $ay" + by' + cy = 0$, alors, pour tous nombres A et B, la fonction $Ay_1 + By_2$ est aussi une solution.

La démonstration de cette propriété est facile et utilise les propriétés de la dérivation.

A cause de cette propriété, on dit que l'équation : $ay" + by' + cy = 0$ est linéaire.

1.2) Résolution

Par analogie avec une équation du premier ordre, on cherche une solution de la forme : $y(x) = e^{rx}$ où r est un complexe.

La fonction $g(x) = e^{rx}$ est deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$, et, pour tout réel x : $y'(x) = re^{rx}$, $y''(x) = r^2e^{rx}$

Donc, dire que y est solution équivaut à dire que, pour tout réel x : $ar^2e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0$

soit encore, puisque e^{rx} n'est jamais nul, à : $ar^2 + br + c = 0$

La résolution de l'équation $ar^2 + br + c = 0$ permet donc de trouver des solutions (a priori à valeurs complexes). De plus, lorsque l'on connaît deux solutions y_1 et y_2 de l'équation $ay" + by' + cy = 0$, on en connaît une famille car toutes les fonctions $Ay_1 + By_2$, avec A et B complexes, sont aussi solutions.

- **Premier cas** : Si $\Delta > 0$ alors l'équation $ar^2 + br + c = 0$ a deux racines, r_1 et r_2, réelles et distinctes.

D'après ce qui précède, les fonctions y_1 et y_2, définies sur IR par : $y_1(x) = e^{r_1x}$ et $y_2(x) = e^{r_2x}$ sont des solutions (à valeurs réelles dans ce cas).

Nous admettrons que toute autre solution réelle s'écrit : $y(x) = Ae^{r_1x} + Be^{r_2x}$ où A et B réels.

- **Deuxième cas** : Si $\Delta < 0$ alors l'équation $ar^2 + br + c = 0$ a deux racines, z_1 et z_2, complexe conjugués.

Alors les fonctions g_1 et g_2 définies sur $\mathbb{R}$ par : $g_1(x) = e^{z_1x}$, et $g_2(x) = e^{\bar{z}_1x}$ sont des solutions à valeurs complexes.

Notons $z_1 = \alpha + i\omega$ où $\alpha = \frac{-b}{2a}$ et $\omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$ sont des réels.

$g_1(x) = e^{z_1x} = e^{(\alpha+i\omega)x} = e^{\alpha x}.e^{i\omega x} = e^{\alpha x}.(cos(\omega x) + isin(\omega x))$ et

$g_2(x) = e^{\overline{z_1}x} = e^{(\alpha-i\omega)x} = e^{\alpha x}.e^{-i\omega x} = e^{\alpha x}.(cos(\omega x) - isin(\omega x))$

$y_1 = \frac{g_1(x)-g_2(x)}{2}$ et $y_2 = \frac{g_1(x)+g_2(x)}{2i}$ sont aussi des solutions de l'ED (E) et à valeurs réelles et on a :

$(\forall x \in \mathbb{R})(y_1(x) = e^{\alpha x}\, cos(\omega x)$ et $(\forall x \in \mathbb{R})(y_2(x) = e^{\alpha x}\, sin(\omega x)$

Nous admettrons que toutes les solutions s'écrivent de la forme : $y = Ae^{\alpha x}cos(\omega x) + Be^{\alpha x}\, sin(\omega x)$

Pour résumer : si $z_1 = p + iq$ alors toutes les solutions de l'ED s'écrivent de la forme :

$y = e^{px}(Acos(qx) + Bsin(qx))$ où A et B sont des réels.

- **Troisième cas** : Si $\Delta = 0$ l'équation $ar^2 + br + c = 0$ a une racine double $r = \frac{-b}{2a}$

La fonction $y_1 = e^{rx}$ définie sur $\mathbb{R}$ est solution de l'ED (E) ; nous admettrons que la fonction $y_2 = xe^{rx}$ est aussi solutions de (E) et que toutes les solutions de (E) s'écrivent de la forme $y = (Ax + B)e^{rx}$ où A et B sont des réels

Théorème :

Soit l'équation différentielle (E) $ay'' + by' + cy = 0$ et soit (E_1): $ar^2 + br + c = 0$ son équation caractéristique. $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de (E_1)

- Si $\Delta > 0$ l'équation (E_1) a deux racines , r_1 et r_2, réelles et distinctes et les solutions de l'équation (E) sont les fonctions $y(x) = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$ où A et B réels

- Si $\Delta < 0$ l'équation (E_1) a deux racines, z_1 et z_2, complexes conjugués et si $z_1 = p - iq$ alors les solutions de l'équation (E) sont les fonctions $y = e^{px}(Aco\,s(qx) + B\,sin(px))$ où A et B réels

- Si $\Delta = 0$ l'équation (E_1) admet une racine double $r = \frac{-b}{2a}$ et les solutions de l' ED (E) sont les fonctions : $y = (Ax + B)e^{rx}$ où A et B sont des réels .

Exercice :

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $2y'' + y' - 3y = 0$
2. $y'' + 2y' + 2y = 0$
3. $y'' + 4y' + 4y = 0$
4. $y'' + 2y = 0$