	Généralité sur les fonctions	1ère BAC SM

Exercice 1

Soit g la fonction définie par : $g(x)=x^2-\frac{2}{x}+1$

1) montrer que g est croissante sur $]1,+\infty[$
2) on considère la fonction f définie par :

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^3+x-2}}$$

a) montrer que $D_f=]1,+\infty[$

b) vérifier que $(\forall x\in D_f)\quad f(x)=\frac{1}{\sqrt{g(x)}}$

c) en déduire le sens de variation de f

Exercice 2

on considère la fonction f définie par :

$$f(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{x}$$

1) Montrer que f minorée
2) a) montrer que f est majorée par $\frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{2}$ est-elle une valeur maximale de f ?

3) on pose $h(x)=\sqrt{x-1}$ et $g(x)=\frac{x}{x^2+1}$

a) montrer que $T_g=\frac{1-xy}{(1+x^2)(1+y^2)}$

b) étudier les variations de g sur $[0,1]$ et sur $[1,+\infty[$

c) soient $a\ et\ b$ deux réels de $\mathbb{R}^{*+}$ tels que :

$a+b\geq 2$. montrer que $a+b+\frac{1}{a+b}\geq\frac{5}{2}$

d) vérifier que $f=g\circ h$ puis étudier les variations de f sur D_f

Exercice 3

soient a , $b\ et\ c$ des réels de $\mathbb{R}^+$

on considère la fonction f définie par :

$f(x)=x^2-(b+c)x+b^2+c^2-bc$

1) dresser le tableau de variations de f
2) en déduire que $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ac$

Exercice 4

On considère les fonctions f et g définies par :

$g(x)=(x-1)^3$ et $f(x)=-1+\frac{3}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}$

1) montrer que $T_g=\left(x+\frac{y-3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}(y-1)^2$
2) vérifier que $(\forall x\in\mathbb{R}^*)\ f(x)=g\left(\frac{1}{x}\right)$
3) étudier les variations de f sur $\mathbb{R}^{*+}$ et $\mathbb{R}^{*-}$

Exercice 5

soit la fonction f telle que $f(x)=x^3+x^2+x$

1) montrer que

$(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2)\ x^2+y^2+xy+x+y+1>0$

2) étudier le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$
3) on pose $h(x)=\frac{x+\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}}$

a) Vérifier $h(x)=f\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

b) En déduire la monotonie de h

Exercice 6

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$

1) déterminer le domaine D et montrer que la droite $(\Delta)\quad x=\frac{1}{2}$ est axe de symétrie
2) a) en utilisant un raisonnement par équivalence successive montrer que f est minorée par 1

b) 1 est-elle valeur minimale de f ?

3) calculer $(f(x))^2$ puis déduire que f est majorée par $\sqrt{2}$. $\sqrt{2}$ est-elle valeur maximale de f ?
4) a) montrer que :

$$T_f=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}-\frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}}$$

b) étudier les variations de f sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ et $\left[\frac{1}{2},1\right]$

5) on pose $h(x)=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{x}}$ et $g(x)=\frac{2}{x}$

a) montrer que $h=f\circ g$ puis étudier les variations de h