

~ Tronc Commun ~
L'ordre dans R
(6 exercices résolus)

Exercice 1 :

soit n un entier naturel non nul, comparer a et b dans les cas suivants :

1) $a = \frac{1}{n}$; $b = \frac{2}{n+1}$

2) $a = \frac{n}{n+1}$; $b = \frac{n+1}{n+2}$

3) $a = \frac{n}{\sqrt{n+1}}$; $b = \sqrt{n+1}$

Exercice 2 :

Soient a et b deux réels strictement positifs.

1) Montrer que $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$

2) Développer $(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$

3) En déduire que $(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4$

Exercice 3 :

Soient a et b deux réels tels que $a \geq 1$ et $b \geq 1$.

Montrer que $\sqrt{a-1} + \sqrt{b-1} \leq \sqrt{ab}$

Exercice 4 :

Soient x et y deux réels positifs tels que $x + y = 1$

1) Montrer que $xy \leq \frac{1}{4}$

2) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\left(1 + \frac{1}{x^n}\right)\left(1 + \frac{1}{y^n}\right) \geq (1 + 2^n)^2$

Exercice 5 :

x et y deux réels tels que : $0 < x < y$

1) Montrer que $x^2 < xy < y^2$

2) Montrer que si $xy = 15$ alors $x < \sqrt{15} < y$

3) Montrer que $\frac{931}{241} < \sqrt{15} < \frac{3615}{931}$

Exercice 6 :

Soient x et y deux réels tels que : $1 \leq x \leq 2$ et $\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{3}{2}$

On pose $E = x^2 - y^2 + x + y$

- 1) Donner un encadrement de E
- 2) Vérifier que : $E = (x + y)(x - y + 1)$ et en déduire un encadrement de E .
- 3) En déduire que : $\frac{3}{4} \leq E \leq \frac{29}{4}$