

TD BARYCENTRE AVEC CORRECTION

Exercice1 : Construire $G = \text{Bar}\{(A, 4); (B, -5)\}$

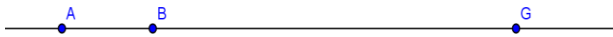
Solution : $G = \text{Bar}\{(A, 4); (B, -5)\}$ donc :

$$4\overline{AG} - 5\overline{BG} = \vec{0}$$

$$4\overline{AG} + 5(\overline{GA} + \overline{AB}) = \vec{0} \Leftrightarrow -4\overline{GA} + 5\overline{GA} + 5\overline{AB} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overline{GA} + 5\overline{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overline{AG} = 5\overline{AB}$$

Donc le point $G \in (AB)$



Exercice2 :

Construire $G = \text{Bar}\{(A, \sqrt{8}); (B, -\sqrt{2})\}$

Solution :

$$G = \text{Bar}\{(A, \frac{1}{\sqrt{2}} \times \sqrt{8}); (B, \frac{1}{\sqrt{2}} \times (-\sqrt{2}))\}$$

donc : $G = \text{Bar}\{(A, 2); (B, -1)\}$

$$\text{donc : } 2\overline{AG} - \overline{BG} = \vec{0}$$

$$2\overline{AG} - (\overline{BA} + \overline{AG}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overline{AG} = \overline{AB} \text{ Donc } G = B$$

Exercice3 : Dans le plan (P) rapporté à un repère $R(O; \vec{i}; \vec{j})$ soient $A(3;2)$ et $B(4;1)$

et soit $G = \text{Bar}\{(A, 1); (B, -5)\}$

Déterminer les coordonnées de G

$$\text{Solution : on a : } \begin{cases} x_G = \frac{-x_A + 5x_B}{4} \\ y_G = \frac{-y_A + 5y_B}{4} \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} x_G = \frac{17}{4} \\ y_G = \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$\text{Donc : } G\left(\frac{17}{4}; \frac{3}{4}\right)$$

Exercice4 : soit ABC un triangle et soit :

$$I = \text{Bar}\{(B, 4); (C, -3)\}$$

Déterminer les coordonnées du point I dans le repère $R(A; \overline{AB}; \overline{AC})$

$$\text{Solution : on a : donc } (4 + (-3))\overline{AI} = 4\overline{AB} - 3\overline{AC}$$

donc $\overline{AI} = 4\overline{AB} - 3\overline{AC}$ donc dans le repère

$$R(A; \overline{AB}; \overline{AC}) \quad I(4; -3)$$

Exercice5 : E et F deux points du plan tels que : $\overline{EG} = 2\overline{EF}$ et $E \notin (AB)$ et G est le barycentre des points $(A; 2)$ et $(B; -3)$

1) Montrer que G est le barycentre des points $(E; -1)$ et $(F; 2)$

2) en déduire que les droites (EF) et (AB) se coupent et déterminer le point d'intersection

$$\text{solution : } \overline{EG} = 2\overline{EF} \Leftrightarrow \overline{EG} = 2(\overline{EG} + \overline{GF})$$

$$\Leftrightarrow \overline{EG} = 2\overline{EG} + 2\overline{GF} \Leftrightarrow -\overline{EG} - 2\overline{GF} = \vec{0}$$

$-\overline{GE} + 2\overline{GF} = \vec{0}$ donc G est le barycentre des points $(E; -1)$ et $(F; 2)$

2) on a G le barycentre des points $(E; -1)$ et $(F; 2)$ donc $G \in (EF)$ et on a G est le barycentre des

points $(A; 2)$ et $(B; -3)$ donc $G \in (AB)$

Donc les droites (EF) et (AB) se coupent en G

Exercice6 : Dans le plan (P) rapporté à un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ Soient $A(0;5)$ et $B(3;2)$

Et soit $G = \text{Bar}\{(A, 1); (B, 2)\}$

1) Déterminer les coordonnées de G

2) Déterminer et dessiner l'ensemble suivant :

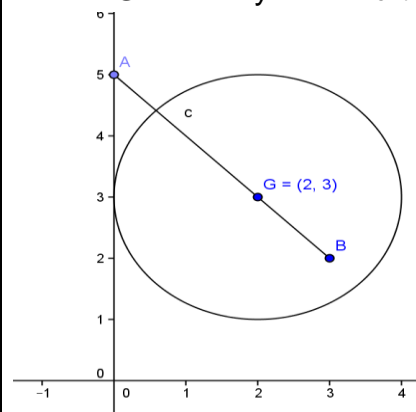
$$(C) = \{M \in (P) / \|\overline{MA} + 2\overline{MB}\| = 6\}$$

$$\text{Solution : } \begin{cases} x_G = \frac{0+6}{3} = 2 \\ y_G = \frac{5+4}{3} = 3 \end{cases} \text{ donc } G(2;3)$$

D'après la propriété caractéristique du barycentre on a : $\|\overline{MA} + 2\overline{MB}\| = 6\text{cm} \Leftrightarrow \|3\overline{MG}\| = 6\text{cm}$

$$\Leftrightarrow |3| \|\overline{MG}\| = 6\text{cm} \Leftrightarrow 3MG = 6\text{cm} \Leftrightarrow MG = 2\text{cm}$$

Donc l'ensemble des points est le cercle de centre G et de rayon $r = 2\text{cm}$



Exercice7 : soit ABC un triangle

1) Construire $G = \text{Bar}\{(A, 1); (B, -1); (C, 3)\}$

2) Construire $G = \text{Bar}\{(A, 4); (B, 1/2); (C, -3)\}$

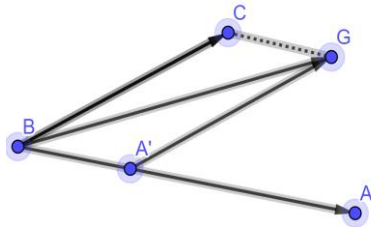
Solution : 1)

$G = \text{Bar}\{(A, 1); (B, -1); (C, 3)\}$ donc d'après la propriété caractéristique du barycentre on a :

$$(1 + (-1) + 3)\overline{MG} = 1\overline{MA} + (-1)\overline{MB} + 3\overline{MC}$$

On pose : $M = B$ on aura :

$$3\overline{BG} = \overline{BA} + 3\overline{BC} \Leftrightarrow \overline{BG} = \frac{1}{3}\overline{BA} + \overline{BC}$$



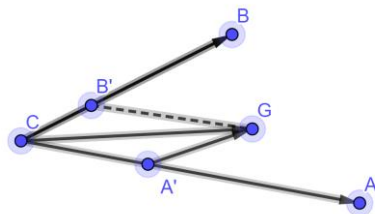
2) $G = \text{Bar}\{(A, 4); (B, 1/2); (C, -3)\}$

Donc d'après la propriété caractéristique du barycentre on a :

$$(4 + 1/2 - 3)\overline{MG} = 4\overline{MA} + 1/2\overline{MB} - 3\overline{MC}$$

On pose : $M = C$ on aura :

$$\frac{3}{2}\overline{CG} = 4\overline{CA} + \frac{1}{2}\overline{CB} \Leftrightarrow \overline{CG} = \frac{8}{3}\overline{CA} + \frac{1}{3}\overline{CB}$$



Exercice 8 : Soit ABC un triangle et G point tel que : $2\overline{AC} = 3\overline{AG} - \overline{GB}$

1) montrer que G le barycentre de :

$\{(A, 1); (B, 1); (C, 2)\}$ et construire le point G

Solution : $2\overline{AC} = 3\overline{AG} - \overline{GB} \Leftrightarrow 2\overline{AC} - 3\overline{AG} + \overline{GB} = \vec{0}$

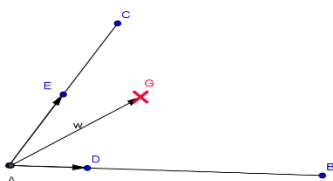
$$\Leftrightarrow 2(\overline{AG} + \overline{GC}) - 3\overline{AG} + \overline{GB} = \vec{0} \Leftrightarrow -\overline{AG} + \overline{GB} + 2\overline{GC} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow -\overline{AG} + \overline{GB} + 2\overline{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overline{GA} + \overline{GB} + 2\overline{GC} = \vec{0}$$

Donc G le barycentre de : $\{(A, 1); (B, 1); (C, 2)\}$

$$\text{On a : } \textcircled{R} \quad \overline{AG} = \frac{b}{a+b+c}\overline{AB} + \frac{c}{a+b+c}\overline{AC}$$

$$\text{Donc : } \overline{AG} = \frac{1}{4}\overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{AC} \quad \text{donc} \quad \overline{AG} = \frac{1}{4}\overline{AB} + \frac{2}{4}\overline{AC}$$



Exercice 9 : on utilisant La propriété d'associativité Construire le barycentre G du système pondéré $\{(A, 2); (B, -3); (C, 5)\}$

Solution : soit $E = \text{Bar}\{(A, 2); (B, -3)\}$

d'après la propriété caractéristique du barycentre on a : $-\overline{ME} = 2\overline{MA} - 3\overline{MB}$

On pose : $M = A$ on aura : $-\overline{AE} = -3\overline{AB}$

Donc : $\overline{AE} = 3\overline{AB}$

d'après la Propriété d'associativité on a :

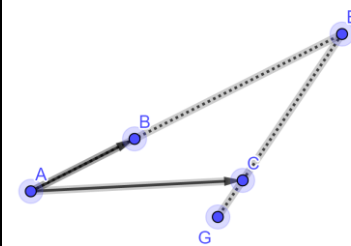
$G = \text{Bar}\{(E, -1); (C, 5)\}$

d'après la propriété caractéristique du barycentre

on a : $4\overline{MG} = -\overline{ME} + 5\overline{MC}$

On pose : $M = E$ on aura :

$$4\overline{EG} = 5\overline{EC} \Leftrightarrow \overline{EG} = \frac{5}{4}\overline{EC}$$



Exercice 10 : Soit ABC un triangle et G le centre de gravité du triangle ABC et I le milieu du segment $[BC]$. Montrer que G est le centre de gravité de $(A;1)$ et $(I;2)$

Solution : G le centre de gravité du triangle ABC Donc G est le barycentre de :

$\{(A, 1); (B, 1); (C, 1)\}$

I le milieu du segment $[BC]$ Donc I est le

barycentre de : $\{(B, 1); (C, 1)\}$

D'après la Propriété d'associativité on a :

G est le barycentre de : $\{(I, 2); (A, 1)\}$

Exercice 11 : Soit ABC un triangle. Pour tout point M on pose : $\vec{v} = 2\overline{MA} + \overline{MB} - 3\overline{MC}$

1) Réduire l'écriture de \vec{v} et montrer que \vec{v} ne dépend pas du point M

2) soit $K = \text{Bar}\{(C, -3); (B, 1)\}$ montrer que :

$$\vec{v} = 2\overline{KA}$$

3) soit $G = \text{Bar}\{(A, 2); (B, -1); (C, -3)\}$

montrer que : Pour tout point M on a :

$$2\overline{MA} - \overline{MB} - 3\overline{MC} = 2\overline{GM}$$

4) en déduire l'ensemble des points M tel que

$$\|2\overline{MA} - \overline{MB} - 3\overline{MC}\| = \|2\overline{MA} + \overline{MB} - 3\overline{MC}\|$$

Solution : 1)

$$\vec{v} = 2\overline{MA} + \overline{MB} - 3\overline{MC} = 2\overline{MA} + \overline{MA} + \overline{AB} - 3(\overline{MA} + \overline{AC})$$

$$\vec{v} = \overline{AB} - 3\overline{AC} \quad \text{donc} \quad \vec{v} \text{ ne dépend pas du point } M$$

2) on a : $2\overline{MA} + \overline{MB} - 3\overline{MC} = \overline{AB} - 3\overline{AC}$ Pour tout point M donc si $M = K$ on aura :

$$2\overline{KA} + \overline{KB} - 3\overline{KC} = \overline{AB} - 3\overline{AC}$$

Et on a : $K = \text{Bar}\{(C, -3); (B, 1)\}$ donc : $\overline{KB} - 3\overline{KC} = \vec{0}$

Donc : $2\overline{KA} = \overline{AB} - 3\overline{AC}$ donc : $2\overline{KA} = \vec{v}$

3) d'après la propriété caractéristique du

barycentre on a :

$$2\overline{MA} - \overline{MB} - 3\overline{MC} = (2 + (-1) + (-3))\overline{MG} = -2\overline{MG} = 2\overline{GM}$$

$$4)\|2\overline{MA} - \overline{MB} - 3\overline{MC}\| = \|2\overline{MA} + \overline{MB} - 3\overline{MC}\|$$

$$\Leftrightarrow \|2\overline{GM}\| = \|2\overline{KA}\| \Leftrightarrow 2GM = 2KA \Leftrightarrow GM = KA$$

Donc l'ensemble des points est le cercle (C) de centre G et de rayon $r = KA$

Exercice 12 : Soit ABC un triangle tel que :

$AC = 6\text{cm}$ et $AB = 5\text{cm}$ et $BC = 4\text{cm}$

a) Construire G le barycentre de :

$\{(A, 1); (B, 2); (C, 1)\}$

b) Déterminer et Construire l'ensemble (E) des

points M du plan tel que : $\|\overline{MA} + 2\overline{MB} + \overline{MC}\| = AC$

c) Déterminer et Construire l'ensemble (F) des points M du plan tel que :

$$\|\overline{MA} + 2\overline{MB} + \overline{MC}\| = \|3\overline{MA} + 2\overline{MC}\|$$

Solution : G est le barycentre de :

$\{(A, 1); (B, 2); (C, 1)\}$ donc G est le barycentre de : $\{(B, 2); (I, 2)\}$ d'après La propriété d'associativité du barycentre

Donc G est le milieu du segment [BI]

b) D'après la propriété caractéristique du

barycentre on a : $\|4\overline{MG}\| = AC \Leftrightarrow GM = \frac{AC}{4} = 1.5$

Donc l'ensemble des points est le cercle de centre G et de rayon $r = 1.5\text{cm}$

b) Soit G' est le barycentre de :

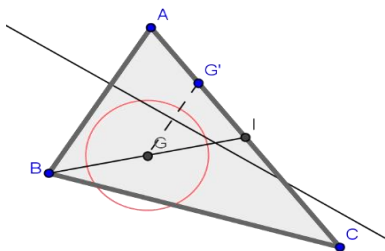
$\{(A, 3); (C, 1)\}$ Donc d'après la propriété caractéristique du barycentre on a : $\forall M \in (P)$

$$\overline{MA} + 2\overline{MB} + \overline{MC} = 4\overline{MG} \text{ et } 3\overline{MA} + \overline{MC} = 4\overline{MG}'$$

$$\text{Donc : } M \in (F) \Leftrightarrow 4MG = 4MG' \Leftrightarrow MG = MG'$$

Donc : (F) est la médiatrice du segment [GG']

Et pour construire le point G' on a : $\overline{AG}' = \frac{1}{4}\overline{AC}$



Exercice13 : Dans le plan (P) rapporté à un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ Soient $A(-1;1)$ et $B(0;2)$ et $C(1;-1)$

et $D(1;0)$ Et soit $G = \text{Bar}\{(A, 1); (B, 2)\}$

1) Déterminer les coordonnées de

$K = \text{Bar}\{(A, 2); (B, 3)\}$

2) Déterminer les coordonnées de L le centre de gravité du triangle ABC

3) Déterminer les coordonnées de Barycentre des points (A;2) et (B;3) et (C;1) et (D;-1)

Solution :1)
$$\begin{cases} x_K = \frac{-2+0}{5} = -\frac{2}{5} \\ y_K = \frac{2+6}{5} = \frac{8}{5} \end{cases} \text{ donc } K\left(-\frac{2}{5}; \frac{8}{5}\right)$$

2) les coordonnées de L sont :

$$\begin{cases} x_L = \frac{1x_A + 1x_B + 1x_C}{1+1+1} \\ y_L = \frac{1y_A + 1y_B + 1y_C}{1+1+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_L = \frac{1 \times (-1) + 1 \times 0 + 1 \times 1}{1+1+1} = 0 \\ y_L = \frac{1 \times 1 + 1 \times 2 + 1 \times (-1)}{1+1+1} = \frac{2}{3} \end{cases} \text{ Donc } L\left(0; \frac{2}{3}\right)$$

$$\begin{cases} x_G = \frac{ax_A + bx_B + cx_C + dx_D}{a+b+c+d} \\ y_G = \frac{ay_A + by_B + cy_C + dy_D}{a+b+c+d} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \frac{2 \times x_A + 3 \times x_B + 1 \times x_C + (-1) \times x_D}{5} = -\frac{2}{5} \\ y_G = \frac{2 \times y_A + 3 \times y_B + 1 \times y_C + (-1) \times y_D}{5} = \frac{7}{5} \end{cases}$$

$$G\left(-\frac{2}{5}; \frac{7}{5}\right)$$

Exercice14 : soit ABCD un quadrilatère convexe

Soit H le barycentre du système pondéré

$\{(A, 2); (B, 5); (C, -1)\}$

Soit K le barycentre du système pondéré

$\{(B, 5); (C, -1); (D, 6)\}$

Soit E = Bar $\{(C, -1); (B, 5)\}$

1) Montrer que $\overline{BE} = -\frac{1}{4}\overline{BC}$ et Construire E

2) Montrer que H est le barycentre du système pondéré $\{(A, 1); (E, 2)\}$ et Construire H

3) Montrer que K est le barycentre du système pondéré $\{(D, -3); (E, 2)\}$

4) a) Montrer que D est le barycentre du système pondéré $\{(K, 1); (E, 2)\}$

b) en déduire que $(AK) \parallel (DH)$

Solution :

1) on sait que si M est un point quelconque dans le plan (P) on a :

$$\overline{ME} = \frac{1}{4}(5\overline{MB} - \overline{MC})$$

Pour : $M=B$ on a : $\overline{BE} = -\frac{1}{4}\overline{BC}$ et on peut

Construire E

2) on a : $E = \text{Bar} \{(C, -1); (B, 5)\}$ et $5 + (-1) = 4$

D'après La propriété d'associativité on a H le barycentre du système pondéré $\{(A, 2); (E, 4)\}$ et puisque Le barycentre d'un système pondéré ne varie pas si on multiplie les poids par le même réel non nul on trouve donc que H est le barycentre du système pondéré

$\{(A, 1); (E, 2)\}$

on sait que si M est un point quelconque dans le plan (P) on a :

$$\overline{MH} = \frac{1}{3}(2\overline{ME} + \overline{MA})$$

Pour : $M=A$ on a : $\overline{AH} = \frac{2}{3}\overline{AE}$ et on peut

Construire E

3) D'après La propriété d'associativité on trouve que K le barycentre du système

Pondéré $\{(D, -6); (E, 4)\}$

Et puisque Le barycentre d'un système pondéré ne varie pas si on multiplie les poids par le même réel non nul on trouve donc que K est le barycentre du système pondéré

$\{(D, -3); (E, 2)\}$

4) a) Montrons que D est le barycentre du système pondéré $\{(K, 1); (E, 2)\}$?

Puisque K est le barycentre du système pondéré $\{(D, -3); (E, 2)\}$

Pour tout point M du plan (P) on a :

$$-\overline{MK} = -3\overline{MD} + 2\overline{ME}$$

$$\text{Donc : } 3\overline{MD} = \overline{MK} + 2\overline{ME}$$

Donc : D est le barycentre du système pondéré $\{(K, 1); (E, 2)\}$

4) b) Pour tout point M du plan (P) on a :

$$3\overline{MH} = 2\overline{ME} + \overline{MA} \text{ et } 3\overline{MD} = 2\overline{ME} + \overline{MK}$$

$$\text{Donc : } 3\overline{DH} = 3\overline{MH} - 3\overline{MD}$$

$$3\overline{DH} = 3(\overline{MH} - \overline{MD})$$

$$\text{Donc : } 3\overline{DH} = \overline{MA} - \overline{MK}$$

$$\text{Donc : } (AK) \parallel (DH) : \text{Donc } 3\overline{DH} = -\overline{AK}$$

Exercice15 : ABC un triangle

I et J et K points tels que : $2\overline{BI} = 3\overline{BC}$

Et $8\overline{CJ} = \overline{CA}$ et $5\overline{AK} = 2\overline{AB}$

1) Montrer que I est le barycentre des points pondéré $\left(B; \frac{1}{2}\right)$ et $\left(C; \frac{-3}{2}\right)$

2) le plan (P) est rapporté au repère

$R(A; \overline{AB}; \overline{AC})$

a) Déterminer les coordonnées du point J

b) Déterminer une équation cartésienne de la droite (IK)

c) Montrer que les points I et J et K sont alignés.

Solution : 1)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\overline{BI} - \frac{3}{2}\overline{CI} &= \frac{1}{2}\overline{BI} - \frac{3}{2}(\overline{CB} + \overline{BI}) \\ &= \frac{1}{2}\overline{BI} - \frac{3}{2}\overline{CB} - \frac{3}{2}\overline{BI} = -\overline{BI} + \frac{3}{2}\overline{BC} = -\frac{3}{2}\overline{BC} + \frac{3}{2}\overline{BC} = \vec{0} \end{aligned}$$

Donc : $\frac{1}{2}\overline{BI} - \frac{3}{2}\overline{CI} = \vec{0}$ par suite : I est le

barycentre des points pondéré $\left(B; \frac{1}{2}\right)$ et $\left(C; \frac{-3}{2}\right)$

2) dans le repère $R(A; \overline{AB}; \overline{AC})$ on a : $A(0;0)$ et

$B(1;0)$ et $C(0;1)$

a) on a : $8\overline{CJ} = \overline{CA}$ donc : $8\overline{CA} + 8\overline{AJ} = \overline{CA}$

$$\text{donc : } 8\overline{AJ} = -7\overline{CA} \text{ donc : } \overline{AJ} = \frac{7}{8}\overline{AC}$$

$$\text{donc : } J\left(0; \frac{7}{8}\right)$$

b) la droite (IK) passe par I et de vecteur directeur

\overline{IK} et on a : I est le barycentre de $\left(B; \frac{1}{2}\right)$ et

$$\left(C; \frac{-3}{2}\right) \text{ donc : } \begin{cases} x_I = \frac{\frac{1}{2} \times 1 - \frac{3}{2} \times 0}{-1} = -\frac{1}{2} \\ y_I = \frac{\frac{1}{2} \times 0 - \frac{3}{2} \times 1}{-1} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\text{Donc : } I\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$$

$$\text{Et on a : } 5\overline{AK} = 2\overline{AB} \text{ Donc : } \overline{AK} = \frac{2}{5}\overline{AB}$$

$$\text{Donc : } K\left(\frac{2}{5}; 0\right) \text{ Donc : } \overline{IK}\left(\frac{9}{10}; \frac{3}{2}\right)$$

L'équation cartésienne de la droite (IK) est :

$$\frac{3}{2}x - \frac{9}{10}y + c = 0$$

$$I \in (IK) : \text{ donc : } \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{9}{10}\left(\frac{3}{2}\right) + c = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{4} - \frac{27}{20} + c = 0 \Leftrightarrow c = \frac{21}{10}$$

$$\text{donc : } (IK) : \frac{3}{2}x - \frac{9}{10}y + \frac{21}{10} = 0$$

$$(IK) : 15x - 9y + 21 = 0$$

c) pour Montrer que les points I et J et K sont alignés il suffit de montrer que $J \in (IK)$

on a : $(IK): 15x - 9y + 21 = 0$ et $J\left(0; \frac{7}{8}\right)$

et on a : $15 \times 0 - 9 \frac{7}{8} + 21 = -21 + 21 = 0$

par suite : $J \in (IK)$ donc les points I et J et K sont alignés.

Exercice 16 : ABC un triangle et I un point tel que : $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et K le symétrique de A par rapport à C et J le milieu du segment $[BC]$

1) exprimer I et J et K comme le barycentre de points pondérés à déterminer

2) quelle est le barycentre des points pondérés $(A;1); (B;2); (C;-2)$?

3) Montrer que les points I et J et K sont alignés.

Solution : 1)

• on a J le milieu du segment $[BC]$

Donc : J est le barycentre des points pondérés $(B;1)$ et $(C;1)$

• on a : $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AI} + 2\overrightarrow{IB}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} = \vec{0}$ Donc : I est le barycentre des points pondérés $(A;1)$ et $(B;2)$

• on a : K le symétrique de A par rapport à C

Donc : $2\overrightarrow{KC} = \overrightarrow{KA}$

Donc : $\overrightarrow{KA} - 2\overrightarrow{KC} = \vec{0}$

Donc : K est le barycentre des points pondérés $(A;1)$ et $(C;-2)$

2) on a : K est le barycentre des points pondérés $(A;1)$ et $(C;-2)$ donc :

$$1\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} - 2\overrightarrow{KB} - 2\overrightarrow{KC} = \vec{0}$$

Donc : K est le barycentre des points pondérés $(A;1)$ et $(B;2)$ et $(B;-2)$ et $(C;-2)$

3) D'après La propriété d'associativité on trouve que K le barycentre des points pondérés $(J;-4)$ et $(I;3)$ par suite : $K \in (IJ)$ donc les points I et J et K sont alignés.

Exercice 17 : ABCD un carré et I et J les milieux respectivement des segments $[BC]$ et $[CD]$ et M et

N deux points tel que : $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$

1) déterminer le barycentre des points pondérés $\{(A, 3); (B, 1)\}$ et $\{(A, 3); (D, 1)\}$

2) soit G le barycentre des points pondérés $(A;3); (B;1); (C;1)$ et $(D;1)$

3) Montrer que les droites (MJ) et (NI) et (AC) sont concourantes en G

Solution : 1) on a : $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}$

donc : $3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$

Donc : M est le barycentre des points pondérés $(A;3)$ et $(B;1)$ De même on a :

$\overrightarrow{AN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{ND}$ donc : $3\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{ND} = \vec{0}$

Donc : N est le barycentre des points pondérés $(A;3)$ et $(D;1)$

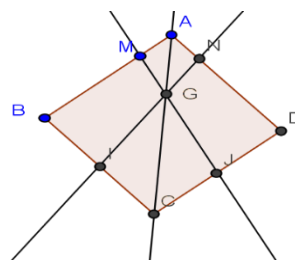
2) soit G le barycentre des points pondérés $(A;3); (B;1); (C;1)$ et $(D;1)$ et puisque J le milieu du segment $[DC]$ alors J est le barycentre des points pondérés $(C;1)$ et $(D;1)$

D'après La propriété d'associativité on trouve que G est le barycentre des points pondérés $(M;4)$ et $(J;2)$ par suite : $G \in (JM)$

De même on a : I le milieu du segment $[BC]$ alors I est le barycentre des points pondérés $(B;1)$ et $(C;1)$ et d'après La propriété d'associativité on trouve que G est le barycentre des points pondérés $(N;4)$ et $(I;2)$ par suite : $G \in (NI)$

Soit H le centre de gravité du triangle BCD donc H est le barycentre des points pondérés $(B;1)$ et $(C;1)$ et $(D;1)$ par suite D'après La propriété d'associativité on trouve que G est le barycentre des points pondérés $(A;3)$ et $(H;3)$ donc : G le milieu du segment $[AH]$ et puisque $ABCD$ est un carré alors : $H \in [AC]$ donc $G \in (AC)$

Conclusion : les droites (MJ) et (NI) et (AC) sont concourantes en G



Exercice 18 : A et B deux points tel que :

$AB = 4\text{cm}$ et soit : (F) l'ensemble des points M du plan tel que : $\frac{MA}{MB} = 3$

1) montrer que : $M \in (F) \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}^2 - 9\overrightarrow{MB}^2 = 0$

2) soit G le barycentre des points pondérés $(A;1); (B;3)$ et K le barycentre des points pondérés $(A;1); (B;-3)$

a) Montrer que : $M \in (F) \Leftrightarrow \overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{MK} = 0$

b) En déduire l'ensemble (F) et le tracer

Solution : 1) $M \in (F) \Leftrightarrow \frac{MA}{MB} = 3 \Leftrightarrow MA = 3MB$

$$M \in (F) \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}^2 - 9\overrightarrow{MB}^2 = 0$$

2)a)

$$M \in (F) \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}^2 - 9\overrightarrow{MB}^2 = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}) = 0$$

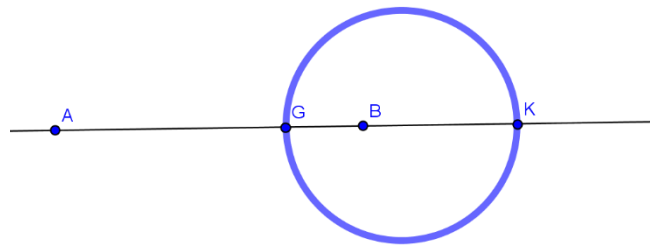
et d'après La propriété caractéristique du barycentre on aura :

$$\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = 4\overrightarrow{MG} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = -2\overrightarrow{MK}$$

$$\text{Donc : } M \in (F) \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}^2 - 9\overrightarrow{MB}^2 = 0 \Leftrightarrow -8\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MK} = 0$$

$$\text{Donc : } M \in (F) \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MK} = 0$$

2)b) d'après a) on déduit que (F) est le cercle de dont un diamètre est $[GK]$



Exercice 19 : A et B deux points tel que :

$AB = 4\text{cm}$ et I le milieu du segment $[AB]$

1) soit : (E) l'ensemble des points M du plan tel

que : $\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} = 4$ et soit H le barycentre des points pondérés $(A;1)$; $(B;3)$

a) montrer que : $H \in (E)$

b) vérifier que : $M \in (E) \Leftrightarrow \overrightarrow{HM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

c) déterminer la nature de l'ensemble (E)

2) soit : (F) l'ensemble des points M du plan tel

que : $MA^2 - MB^2 = 8$

a) Montrer que : $\forall M \in (P)$ on a :

$$MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB}$$

b) En déduire que $(F) = (E)$ et le tracer

Solution : 1) on a : H le barycentre des points

pondérés $(A;1)$; $(B;3)$ donc : $\overrightarrow{AH} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$

Et on a $\overrightarrow{IH} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AH}$ donc $\overrightarrow{IH} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$

donc $\overrightarrow{IH} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ par suite $\overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{4}AB^2 = 4$

Donc $H \in (E)$

b) $M \in (E) \Leftrightarrow \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} = 4 \Leftrightarrow \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{AB}$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{IM} - \overrightarrow{IH}) \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{HM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

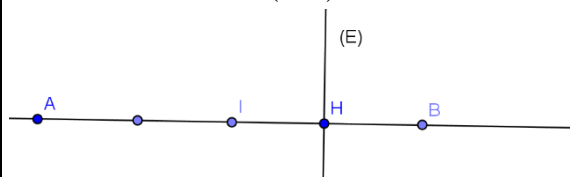
c) de b) on déduit que (E) est la droite perpendiculaire à (AB) en H

$$2)a) MA^2 - MB^2 = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) = 2\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB}$$

car d'après La propriété caractéristique du barycentre on a : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$

$$2)b) M \in (F) \Leftrightarrow MA^2 - MB^2 = 8 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AB} = 4 \Leftrightarrow M \in (E)$$

Donc $(F) = (E)$ par suite (F) est la droite perpendiculaire à (AB) en H



Exercice 20 : A et B deux points tel que :

$AB = 3\text{cm}$ et I le milieu du segment $[AB]$

1) soit : (C) l'ensemble des points M du plan tel

que : $MA^2 + MB^2 = 9$ et soit H le barycentre des points pondérés $(A;1)$; $(B;3)$

a) montrer que : $M \in (C) \Leftrightarrow MI = \frac{3}{2}$

b) déterminer la nature et tracer l'ensemble (C)

2) soit : (C') l'ensemble des points M du plan tel

que : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \frac{-5}{4}$

a) Montrer que : $M \in (C') \Leftrightarrow MI = 1$

b) déterminer la nature et tracer l'ensemble (C')

Solution : 1) on a :

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 &= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 \\ &= 2MI^2 + 2IA^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA}) = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2} \end{aligned}$$

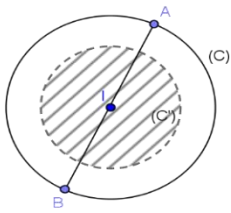
$$\text{Car : } \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA} = \vec{0}$$

$$M \in (C) \Leftrightarrow 2MI^2 + \frac{AB^2}{2} = 9 \Leftrightarrow MI = \frac{3}{2}$$

b) on déduit que (C) est le cercle de centre I et de rayon $r = \frac{3}{2}$

$$2) a) \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$$

Donc : $M \in (C') \Leftrightarrow MI = 1$



2) b) en déduit que (C') est le cercle de centre I et de rayon $r = 1$

Exercice 21 : A l'aide des barycentres, démontrer que les trois médianes d'un triangle sont concourantes et retrouver la position du centre de gravité sur les médianes.

Solution : Notons ABC le triangle, A' le milieu de $[BC]$, B' le milieu de $[AC]$ et C' le milieu de $[AB]$. Définissons finalement G l'isobarycentre de A , B et C . Alors, par associativité du barycentre, G est le barycentre de $(A,1)$ et $(A',2)$. Ainsi, G est sur la droite (AA') . De même, G est sur la droite (BB') et G est sur la droite (CC') . Ainsi, les trois droites sont concourantes en G . De plus, puisque G est le barycentre de $(A,1)$ et $(A',2)$ on a $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$

Exercice 22 :

Soit A, B, P trois points distincts du plan tels que P soit sur le segment $[AB]$. Écrire P comme barycentre de A et B avec des coefficients s'écrivant en fonction des distances PA, PB .

Solution Il suffit de remarquer que : $\overrightarrow{PB} = \frac{PB}{AB}\overrightarrow{AB}$ et

$$\text{que } \overrightarrow{PA} = -\frac{PA}{AB}\overrightarrow{AB}$$

$$\text{Ceci donne } PB \times \overrightarrow{PA} + PA \times \overrightarrow{PB} = \vec{0}$$

Ainsi, P est le barycentre de (A, PB) et de (B, PA) .

C'est en forgeant que l'on devient forgeron »

Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux

calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien

