Les Barycentres

Exercice 1
A et B sont deux points distincts. Construire, s'il existe, le barycentre :

1. G des points pondérés (A ; 1) et (B ; 3).
2. H des points pondérés (A ; 2) et (B ; 2).
3. J des points pondérés (A ; -1) et (B ; 2).
4. K des points pondérés (A ; -2) et (B ; -6).
5. L des points pondérés (A ; -2) et (B ; 2).

Exercice 2
Dans un plan muni d'un repère $(O ;\vec{i},\vec{j})$, on considère les points A(1 ; 1) et B(5 ; 3).

1. Calculer les coordonnées du barycentre G de (A ; 2) et (B ; 1).
2. Déterminer des réels a et b tels que H(-1 ; 0) soit le barycentre de (A ; a) et (B ; b).
3. Peut-on trouver a et b tels que O soit le barycentre de (A ; a) et (B ; b) ?

Exercice 3
Soit A et B deux points tels que AB = 4.
On considère le barycentre G de (A ; 1) et (B ; 3) et le barycentre K de (A ; 3) et (B ; 1).

1. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AK}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$. Placer sur un dessin les points A, B, G et K.
2. Montrer que les segments [AB] et [GK] ont le même milieu.

Exercice 4
Soit QUAD un quadrilatère.
Construire le barycentre G de (Q ; 1), (U ; 1), (A ; -2) et (D ; -1).

Exercice 5
Soit ABC un triangle, A', B', C' les milieux respectifs de [BC], [AC], [AB] et G le barycentre des points pondérés (A ;1), (B ;1) et (C ;1).

1. Montrer que G est le barycentre de (C ; 1) et (C' ; 2).
2. En déduire la position de G sur le segment [CC'].
3. Démontrer que G appartient à [BB'] et à [AA']. Que peut-on en déduire ?

Exercice 6
Soit TRUC un quadrilatère.
On désigne par K, L, M, N les milieux respectifs de [TR], [RU], [UC], [CT] et par G l'isobarycentre des quatre points T, R ,U et C.
Prouver que G est le milieu de [KM] et de
.
Que peut-on dire du quadrilatère KLMN ?

Correction

Exercice 1

1. G barycentre des points pondérés (A ; 1) et (B ; 3).
Comme 1 + 3 ≠ 0, alors le barycentre de ce système existe.
Par définition du barycentre, on a : $\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$
En utilisant la relation de Chasles, on obtient :
$\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$
$4\overrightarrow{GA} = -3\overrightarrow{AB}$
$\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$

2. H barycentre des points pondérés (A ; 2) et (B ; 2).
Comme 2 + 2 ≠ 0, alors le barycentre de ce système existe.
Par définition du barycentre, on a : $2\overrightarrow{HA} + 2\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{0}$
En utilisant la relation de Chasles, on obtient :
$2\overrightarrow{HA} + 2\overrightarrow{HA} + 2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$
$4\overrightarrow{HA} = -2\overrightarrow{AB}$
$\overrightarrow{AH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

3. J barycentre des points pondérés (A ; -1) et (B ; 2).
Comme -1 + 2 ≠ 0, alors le barycentre de ce système existe.
Par définition du barycentre, on a : $-\overrightarrow{JA} + 2\overrightarrow{JB} = \overrightarrow{0}$
En utilisant la relation de Chasles, on obtient :
$-\overrightarrow{JA} + 2\overrightarrow{JA} + 2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$
$\overrightarrow{JA} = -2\overrightarrow{AB}$
$\overrightarrow{AJ} = 2\overrightarrow{AB}$

4. K barycentre des points pondérés (A ; -2) et (B ; -6).
Comme -2 - 6 ≠ 0, alors le barycentre de ce système existe.
Par définition du barycentre, on a : $-2\overrightarrow{KA} + 6\overrightarrow{KB} = \overrightarrow{0}$
En utilisant la relation de Chasles, on obtient :
$-2\overrightarrow{KA} + 6\overrightarrow{KA} + 6\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$
$-8\overrightarrow{KA} = 6\overrightarrow{AB}$
$\overrightarrow{AK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$

5. L barycentre des points pondérés (A ; -2) et (B ; 2).
Comme -2 + 2 = 0, alors le barycentre n'est pas défini.

Exercice 2

1. Coordonnées du barycentre G de (A ; 2) et (B ; 1).
$x_G = [(2 \times 1 + 1 \times 5)/3] = [7/3]$ et $y_G = [(2 \times 1 + 1 \times 3)/3] = [5/3]$
D'où : G a pour coordonnées (7/3 ; 5/3).

2. H est le barycentre de (A ; a) et (B ; b) si et seulement si
$x_H = \frac{a \times 1 + b \times 5}{a + b}$ et $y_H = \frac{a \times 1 + b \times 3}{a + b}$

Or H a pour coordonnées (-1 ; 0), donc $\begin{cases} \frac{a + 5b}{a + b} = -1 \\ \frac{a + 3b}{a + b} = 0 \end{cases}$

ce qui équivaut à : $\begin{cases} 2a + 6b = 0 \\ a + 3b = 0 \end{cases}$

Ces deux équations sont équivalentes à a = -3b.
Une solution du système est donc : a = -3 et b = 1.
H est donc barycentre de (A ; -3) et (B ; 1).
Remarque :

en fait, H est barycentre de (A ; -3b) et (B ; b) avec -3b + b $\neq$ 0 c'est-à-dire b $\neq$ 0.

3. O est le barycentre de (A ; a) et (B ; b) si et seulement si

$$x_O = \frac{a \times 1 + b \times 5}{a+b} \quad \text{et} \quad y_O = \frac{a \times 1 + b \times 3}{a+b}$$

Or O a pour coordonnées (0 ; 0), donc : $\begin{cases} \dfrac{a+5b}{a+b} = 0 \\ \dfrac{a+3b}{a+b} = 0 \end{cases}$

ce qui équivaut à :

$$\begin{cases} a+5b=0 \\ a+3b=0 \end{cases}$$

Ce système admet un unique couple solution (0 ; 0). Comme la somme des coefficients est nulle, alors O ne peut pas être barycentre de (A ; a) et (B ; b).

Exercice 3

1. G étant le barycentre de (A ; 1) et (B ; 3), par définition, on a :

$\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$

donc :

$\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$

$4\overrightarrow{GA} = -3\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$

De même, K étant le barycentre de (A ; 3) et (B ; 1), par définition du barycentre, on a :

$3\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} = \overrightarrow{0}$

donc :

$3\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$

$4\overrightarrow{KA} = -\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$

2. Soit I le milieu du segment [AB]. On va montrer que I est aussi le milieu du segment [GK].

$\overrightarrow{IG} + \overrightarrow{IK} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AK}$

$= 2\overrightarrow{IA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$

Or, I étant le milieu du segment [AB], $2\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{BA}$. On obtient donc :

$\overrightarrow{IG} + \overrightarrow{IK} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$

I est donc le milieu du segment [GK].

On a donc montré que les segments [AB] et [GK] ont le même milieu.

Exercice 4

G étant le barycentre de (Q ; 1), (U ; 1), (A ; -2) et (D ; -1), on a :

$\overrightarrow{GQ} + \overrightarrow{GU} - 2\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{0}$

$\overrightarrow{GQ} + \overrightarrow{GQ} + \overrightarrow{QU} - 2\overrightarrow{GQ} - 2\overrightarrow{QA} - \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{0}$

$\overrightarrow{DG} = -\overrightarrow{QU} + 2\overrightarrow{QA}$

Exercice 5

1. C' est le milieu de [AB], donc C' est le barycentre de (A, 1) (B, 1).

G est le barycentre de (A, 1), (B, 1), (C, 1).

Donc d'après le théorème d'associativité du barycentre, on a :

G est le barycentre de (C',2), (C, 1).

2. On vient de montrer que G est le barycentre de (C', 2), (C, 1), donc :

$2\overrightarrow{GC'} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$

$2\overrightarrow{GC} + 2\overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$
$3\overrightarrow{GC} = -2\overrightarrow{CC'}$
$\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CC'}$

3. A' est le milieu de [BC], donc A' est le barycentre de (B, 1) (C, 1).
G est le barycentre de (A, 1), (B, 1), (C, 1).
Donc d'après le théorème d'associativité du barycentre, on a :
G est le barycentre de (A', 2), (A, 1).
On en déduit que G appartient à (A'A) [même au segment [A'A]].

B' est le milieu de [AC], donc B' est le barycentre de (A, 1)(C, 1).
G est le barycentre de (A,1), (B,1), (C,1).
Donc d'après le théorème d'associativité du barycentre, on a :
G est le barycentre de (B',2), (B, 1).
On en déduit que G appartient à (B'B) [même au segment [B'B]].

Les droites (AA'), (BB') et (CC') sont donc concourantes en G.
fait, G est le centre de gravité du triangle ABC.]

Exercice 6
K milieu de [TR], donc K barycentre de (T,1)(R,1)
M milieu de [UC], donc M barycentre de (U,1)(C,1)
G barycentre des points (T,1)(R,1)(U,1)(C,1)
D'après le théorème d'associativité du barycentre, on en déduit que G est le barycentre de (K,2)(M,2).
G est donc le milieu du segment [KM].

De même :
L milieu de [RU], donc L barycentre de (R,1)(U,1)
N milieu de [TC], donc N barycentre de (T,1)(C,1)
G barycentre des points (T,1)(R,1)(U,1)(C,1)
D'après le théorème d'associativité du barycentre, on en déduit que G est le barycentre de (L,2)(N,2).
G est donc le milieu du segment
.

Le quadrilatère KLMN a ses diagonales qui se coupent en leur milieu. Ce quadrilatère est donc un parallélogramme.