Les limites

Exercice 1

On considère la fonction $f(x)=\dfrac{x^2+1-\cos x}{x+\sin x}$

a) calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

b) montrer que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{3}{4}$

c) montrer que

$$\forall x>1 \ : \ \frac{x^2}{x-1}\le f(x)\le \frac{x^2+2}{x-1}$$

en déduire $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

d) montrer que $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$

et $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{1-\cos x}{x}=0$ puis déduire $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$

Exercice 2

Soit la fonction $f(x)=\sqrt{x^2-2x\cos x+1}$

a) Montrer que $(\forall x\in\mathbb{R})\ \ |x-\cos x|\le f(x)$

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\cos x}{x}=0$

c) déterminer $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\cos x}{x}$

d) Montrer que $(\forall x\in\mathbb{R}^{+})\ \ f(x)\le x+1$

en déduire $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{f(x)}{x}$

Exercice 3

Soient $a>0$ et $b\neq 0$

On considère la fonction $f(x)=\dfrac{x}{a}E\left(\dfrac{b}{x}\right)$

a) Montrer que

$$(\forall x\in\mathbb{R}^{+*})\ \ /\ \ \frac{b}{a}-\frac{x}{a}<f(x)\le\frac{b}{a}$$

b) encadre $f(x)$ pour $x<0$

c) en déduire que $(\forall x\in\mathbb{R}^{*})\ \ \left|f(x)-\dfrac{b}{a}\right|\le\dfrac{|x|}{a}$

puis calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

Exercice 4

1) Déterminer suivant a la limite

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{ax}{\left(x^2-1\right)^2}$$

2) Etudier suivant a la limite

$$\lim_{x\to +\infty}\sqrt{x^2+x+1}-ax$$

Exercice 5

Soit $m\in\mathbb{R}$ on considère la fonction

$$f_m(x)=\frac{x^3+mx+1}{x^2+x}$$

a) déterminer D le domaine de f_m

b) calculer les limites $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} f_m(x)$

c) discuter suivant m la limite $\lim\limits_{x\to -1} f_m(x)$

Exercice 6

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-x} & ;\ x<1 \\ f(x)=\dfrac{-2x+k}{\sqrt{x^2+2}+1} & ;\ x\ge 1 \end{cases}$$

a) calculer les limites $\lim\limits_{x\to +\infty} f_m(x)$ و $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$

b) calculer la limite $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$

c) calculer $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ puis déduire b

pour que f admette une limite en $a=1$

Exercice 7

a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(ax+1)^2-1}{x}$

b) montrer par récurrence que

$$\lim_{x\to 0}\frac{(ax+1)^n-1}{x}=na\ ,\ a\in\mathbb{R}^{*}$$

c) en déduire $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(11x+1)^{157}+(3x-1)^{97}}{x}$

Les limites

Exercice 8

Soit la fonction $f(x)=\dfrac{\sin x+E(x)}{x}$

a) montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1$

b) calculer $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$

c) montrer que $(\forall x\in\mathbb{R}^{+*})\quad |f(x)-1|\le \dfrac{2}{x}$

en déduire la limite $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

Exercice 9

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)\ ,\ \lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{\tan x}-\sqrt{\sin x}}{x^2\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{7-x}}{\sqrt{2x+3}-\sqrt{15-2x}}\ ,\ \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\sqrt{\cos x}}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{4-x}}{x-1}\ ,\ \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+3}-x-1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}$$

$$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x+4}-\sqrt{x-4}-2}{\sqrt{x-1}-2}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x-\sqrt{x}+1}-\sqrt{x-1}\ ;\quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} xE\left(\frac{4}{x^2}\right)$$

$$\lim_{x\to\sqrt{2}}\frac{(1-x^2)\sqrt{x^2+2}+2}{x^2-2}\ ;\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{E\left(\sqrt{x}\right)}{x+1}$$

Montrer que

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}E(x)=1\ ,\ \lim_{x\to-\infty} x^2E\left(\frac{1}{x}\right)=-\infty$$

Exercice 10

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2+(m+1)x-3}{x^2+x} & ;\ x<-1\\[2mm] f(x)=\dfrac{-2x+b}{\sqrt{x^2+2}+1} & ;\ x\ge -1\end{cases}$$

a) calculer les limites $\lim\limits_{x\to+\infty} f_m(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

b) discuter suivant m la limite $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)$

c) calculer $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)$ puis déduire b et m pour que f admette une limite en $a=-1$

Exercice 11

Soit la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x)=xE\left(\dfrac{1}{x}\right) & ;\ x<0\\[2mm] f(x)=\dfrac{x-E(x)}{\sqrt{x}} & ;\ x>0\end{cases}$$

1) montrer que $(\forall x<0)\quad 1\le xE\left(\dfrac{1}{x}\right)<1-x$

en déduire $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$

2) f admet-elle un limite en $a=0$?

Exercice 12

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x)=\frac{\sqrt{|x|-E(x)}}{x^2}$$

1) montrer que $(\forall x\in\mathbb{R}^{+*})\quad 0\le f(x)<\dfrac{1}{x^2}$

en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2) montrer que

$(\forall x\in\mathbb{R}^{-*})\quad 0\le f(x)<\dfrac{\sqrt{1-2x}}{x^2}$

en déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

Exercice 13

Soit f la fonction définie par :

$$f(x)=\frac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{x^2}$$

1) vérifier que

$$\frac{1-\cos x\cos 2x}{x^2}=\frac{1-\cos x}{x^2}+\cos x\,\frac{1-\cos 2x}{x^2}$$

Et calculer $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cos 2x}{x^2}$

2) en déduire que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=7$