NOMBRES COMPLEXES

En déduire que $\arg(z_2) \equiv -\theta \quad [2\pi]$

2) a) montrer que $\dfrac{z_1}{z_2} = (2+\sqrt{3})\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right)$

b) déduire une mesure de $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$

3) montrer que $\cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

5

Le plan (P) est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère dans (P) la transformation f qui à tout point $M(z)$; $z \neq 0$ associer le point $M'(z')$

Tel que $z' = \dfrac{z^2 - 4}{2z}$

1) a) vérifier que $\dfrac{z'+2i}{z'-2i} = \left(\dfrac{z+2i}{z-2i}\right)^2$

b) on considère $B(-2i)$; $A(2i)$ montrer que

$\left(\widehat{\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'B}}\right) \equiv 2\left(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}\right) \quad [2\pi]$

Et $\dfrac{M'A}{M'B} = \left(\dfrac{MA}{MB}\right)^2$

2) soit I d'affixe $-4-2i$

a) déterminer une mesure de $\left(\widehat{\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}}\right)$ et $\dfrac{IA}{IB}$

b) déterminer et tracer $E = \left\{M(z) / \dfrac{MA}{MB} = 2\right\}$

c) déduire comment poser I' l'image de I

6

Le plan (P) est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit θ de $]-\pi, \pi[$ on considère les points $A(1)$ ، $M(-e^{i\theta})$ et $N(2+e^{-i\theta})$

1) montrer que AMN est isocèle de sommet A

2) déterminer θ pour que AMN soit équilatéral

1

On considère le nombre $Z = 1 + (\sqrt{2}-1)i$

On pose $\theta \equiv \arg(Z)\ [2\pi]$

1) montrer que $\theta \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ (sans déterminer θ)

2) a) montrer que $Z^2 = 2(\sqrt{2}-1)(1+i)$

b) déterminer la forme trigonométrique du nombre $u = 1+i$

c) en déduire $\tan\dfrac{\pi}{8}$

2

soit $Z = \sqrt{2+\sqrt{3}} + i\sqrt{2-\sqrt{3}}$

et on pose $\theta \equiv \arg(Z)\ [2\pi]$

1) vérifier que $\theta \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ (sans déterminer θ)

2) a) montrer que $Z^2 = 2(\sqrt{3}+i)$

b) écrire $u = \sqrt{3}+i$ sous forme trigonométrique

c) déduire que $\theta = \dfrac{\pi}{12}$

et calculer $\cos\dfrac{\pi}{12}$; $\sin\dfrac{\pi}{12}$

3

le plan (P) est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points $A(-1)$ et $B(1)$; Soit $M'(Z')$ l'image du point $M(z \neq 1)$ Par f tel que $Z' = \dfrac{z+1}{z-1}$

1) déterminer $C = \left\{M(z) / \quad Z' \in i\mathbb{R}\right\}$

2)a) montrer que

$(\forall z \in \mathbb{C} - \{1\}) \quad \overline{\left(\vec{u}, \overrightarrow{BM}\right)} + \overline{\left(\vec{u}, \overrightarrow{BM'}\right)} \equiv 0 \quad [2\pi]$

b) interpréter géométriquement le résultat

4

soient A ; B deux points d'ffixes $z_1 = (\sqrt{3}+2) + i$ et $z_2 = 1 + (\sqrt{3}-2)i$

On pose $\theta \equiv \arg(z_1)\ [2\pi]$

1) a) montrer que $\theta \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$

b) montrer que $z_1 z_2 = 4$

9 le plan (P) est muni d'un r.o.d$(O,\vec{u},\vec{v})$.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on considère les points $A_n(z_n)$ tels que $z_0 = 1$ et

$(\forall n \in \mathbb{N})$ $z_{n+1} = \left(\frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)z_n$;on pose $r_n = |z_n|$

1) a) écrire $\frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}$ sous forme trigonométrique

b) montrer que $(r_n)_n$ est géométrique et exprimer r_n en fonction de n

puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} OA_n$

2) a) déterminer z_n sous forme exponentielle

b) montrer que OA_nA_{n+1} est rectangle en A_{n+1}

3) déterminer n pour que A_n appartienne à l'axe des ordonnées

10 le plan (P) est muni d'un r. o. d $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On considère $B(-1)$; $A(1)$ et f qui associer $M(z \neq 0)$ au point $M'\left(z' = -\frac{1}{\bar{z}}\right)$

1) a) déterminer $\arg(z')$ en fonction de $\arg(z)$

b) déduire que M , O et M' sont alignés

2) soit (C) le cercle de centre A et passe par O

On note $(C^*) = (C) - \{O\}$; soit M de (C^*)

a) montrer que $|z'| = |z'+1|$ interpréter le résultat géométriquement

b) déduire une constriction du M' image du M

3) soit $M(z)$ du plan tel que z réel

On considère le point $M_1(\bar{z})$

a) déterminer $\arg\left(\frac{z'+1}{z'-1}\right)$ en fonction de $\left(\overline{\overrightarrow{M_1A},\overrightarrow{M_1B}}\right)$

b)comparer $\left(\overline{\overrightarrow{M_1A},\overrightarrow{M_1B}}\right)$ et $\left(\overline{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}\right)$

déduire que M , B , A و M' sont cocycliques

7 le plan (P) est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. On considère les points $A(i)$ و $B(-i)$ et soit f l'application qui associer $M(z)$; $z \neq 0$ au point $M'\left(z' = z + \frac{1}{z}\right)$

1) a) déterminer $f(A)$ et $f(B)$

b) montrer que $z' \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}$

c) en déduire l'image de (AB) par f

2) on pose $z = e^{i\theta}$ و $\theta \in \mathbb{R}$

a) montrer que $z' = 2\cos\theta$

b) Déduire l'image du cercle $C(O,1)$ par f 3)

a) montrer que $OM \times MM' = 1$ et que $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{OM''}$ sont colinéaire de même sens $M''(\bar{z})$

b) montrer que si $M \in C(O,1)$ alors $OMM'M''$ est un losange

8 le plan (P) est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. on considère les points $A(2i)$ و $B(i)$ et soit f l'application qui fait associer $M(z)$; $z \neq i$ au point $M'\left(z' = \frac{iz+2}{z-i}\right)$

1) déterminer les points invariants par f

2) a) montrer que $|z'| = \frac{AM}{BM}$

Et $\arg(z') \equiv \frac{\pi}{2} + \left(\overline{\overrightarrow{BM},\overrightarrow{AM}}\right)$ $[2\pi]$

b) déterminer $E = \{M(z)\ /\ |z'| = 1\}$ et $F = \{M(z) /\ z' \in i\mathbb{R}\}$

3) a) simplifier $(z'-i)(z-i)$

b) déduire l'image du $C(B,1)$ par f