Rolle et accroissements finis

Exe 1

peut-on appliquer le théorème de rolle à f sur l'intervalle I :

1) $f(x)=\dfrac{|x|}{x^2-3}$; $I=[-2,2]$

2) $f(x)=x-E(x)$; $I=[1,2]$

3) $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$; $I=[0,1]$

4) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$; $I=[-1,1]$

Exe 2

En utilisant le théorème des accroissements finis montrer :

1) $\left(\forall x\in \left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[\right)$ $\sin x < x < \tan x$

2) $\left(\forall x\in \left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[\right)$ $1-\cos x < x^2$

Exe 3

soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ (ab>0)

montrer que :

$$\left(\exists c\in]a,b[\right)\quad \frac{f(b)-f(a)}{b^3-a^3}=\frac{f'(c)}{3c^2}$$

Exe 4

en utilisant le théorème des accroissements finis calculer :

$$\lim_{x\to+\infty} x^3\left(\arctan x-\arctan\sqrt{x^2+1}\right)$$

et $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[5]{x+3}-\sqrt[5]{x}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x-2}}\times\sqrt[15]{x^2}$$

Exe 5

1) montrer que :

$$\left(\forall x\in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[\right)\quad x\cos x-\sin x<0$$

2) étudier le sens de variation de la fonction $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$

3) en déduire que :

$$\left(\forall x\in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[\right)\quad \frac{2x}{\pi}<\sin x<x$$

Exe 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{3-x^2}{2} & ; \quad x\le 1\\ f(x)=\dfrac{1}{x} & ; \quad x>1\end{cases}$$

1) montrer que :

$$(\exists\alpha\in\mathbb{R})\quad f(2)-f(0)=2f'(\alpha)$$

2) quelles sont les valeurs de α

Exe 7

1) montrer que :

$$\left(\forall x\in \left[0,\frac{\pi}{2}\right[\right)\quad \sin x\ge x\cos x$$

2) on pose $g(x)=x\sin x+2\cos x-2$

a) étudier les variations de g sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$

b) déduire le signe de $g(x)$ sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$

3) soit la fonction f définie sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ par :

$$f(x)=\frac{1-\cos x}{x^2}\ ;\quad x\ne 0 \quad \text{et}\quad f(0)=\frac{1}{2}$$

a) montrer que :

$$\left(\forall x\in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[\right)\quad f'(x)=\frac{g(x)}{x^3}$$

b) déduire que f est décroissante sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$

4) soit x de $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$

a) montrer que

$$\left(\exists\alpha\in]0,x[\right)\quad \frac{x-\sin x}{x^3}=\frac{1-\cos\alpha}{3\alpha^2}$$

b) en déduire $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$