Leçon1 : Calcul numérique : Partie1 **Tronc commun littéraire**

Ensemble des nombres réels et sous-ensembles

Présentation globale

I) Ensembles de nombres.

1) Les entiers naturels
2) Les entiers relatifs
3) Les décimaux
4) Les rationnels
5) Les réels
6) Schéma d'inclusions successives

Capacités attendues

- Distinguer les différents ensembles de nombres.
- Distinguer un nombre et sa valeur approchée.
- Représenter un nombre sur la droite numérique.

Recommandations pédagogiques

- On appliquera les différentes connaissances acquises sur les ensembles de nombre,
- On introduira des symboles ensemblistes et on renforcera ces connaissances et des compétences acquises dans le cycle collégial ;
- On choisira des situations qui mettent en évidence le rôle des mathématiques dans le Traitement des situations issues de la vie courante
- On introduira aux élèves des connaissances essentielles relatives à la calculatrice scientifique (somme algébriques, valeurs approchées……) ;

I) Ensembles de nombres.

Il existe différentes sortes de nombres. Pour les classer, on les a regroupés dans différents ensembles remarquables :

1°) L'ensemble des entiers naturels :. $\mathbb{N}$

Un nombre entier est un nombre que l'on peut trouver dans la nature (que l'on peut Compter avec ses doigts).

Notations : N ={0 ; 1 ; 2 ; ... ; n ; ...},

$\mathbb{N}^*$ ={1 ; 2 ; ... ; n ; ...} $=\mathbb{N}-\{0\}$ ($\mathbb{N}$ privé de 0).

3 est un élément de l'ensemble $\mathbb{N}$ On écrit: $3\in\mathbb{N}$ Le symbole "" signifie $\in$ " appartiennent à".

Ont dit que : " 3 appartient à l'ensemble $\mathbb{N}$ ".

-5 n'est pas un élément de l'ensemble $\mathbb{N}$ On écrit: $-5\notin\mathbb{N}$

Ont dit que : " -5 n'appartient pas à l'ensemble $\mathbb{N}$ ".

2°) L'ensemble des entiers relatifs : $\mathbb{Z}$

Tous les entiers qu'ils soient négatifs, positifs ou nuls, sont des entiers relatifs

Notations : $\mathbb{Z}$ ={... ; -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; ... }

Exemples : -45, -1, 0 et 56 sont des entiers relatifs.

L'ensemble des entiers relatifs est noté $\mathbb{Z}$.

Exemples : $-5\in\mathbb{Z}$ et $4\in\mathbb{Z}$ et $-2,5\notin\mathbb{Z}$ et $\frac{-10}{3}\notin\mathbb{Z}$

Tous les entiers naturels sont des entiers relatifs.

On dit alors que l'ensemble $\mathbb{N}$ est inclu dans l'ensemble $\mathbb{Z}$ Cette inclusion est notée : $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}$

Le symbole "$\subset$" signifie "est inclu dans".

$\mathbb{Z}^*=\mathbb{Z}-\{0\}$ ($\mathbb{Z}$ Privé de 0) ; $0\in\mathbb{Z}$ et $0\notin\mathbb{Z}^*$

3°) L'ensemble des décimaux. $\mathbb{D}$

L'ensemble des décimaux est l'ensemble des nombres dits "à virgule". Cet ensemble est noté $\mathbb{D}$.
Par exemple, -3,89 et 5,2 sont des décimaux. Ils peuvent être négatifs ou positifs.
Les entiers relatifs sont aussi des décimaux : En effet :-4 = -4,000
On dit alors que l'ensemble $\mathbb{Z}$ est inclu dans l'ensemble $\mathbb{D}$: ce qui se note :$\mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$
et on a donc: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$

Exemples : $-2,5 \in \mathbb{D}$ et $10 \in \mathbb{D}$ et $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$ car $\frac{1}{3} = 0,33333.......$ ne finit jamais

Exercice : Les nombres sont-ils des décimaux ? $\frac{54}{40}, \frac{126}{450}, \frac{75}{90}$

Correction : $\frac{54}{40} = 1,35 \in \mathbb{D}$ *et* $\frac{126}{450} = 0,28 \in \mathbb{D}$ *et* $\frac{75}{90} = 0,8333333...... \notin \mathbb{D}$

4°) L'ensemble des rationnels. $\mathbb{Q}$

Les nombres rationnels sont les fractions de la forme $\frac{p}{q}$

où p et q sont des entiers (non nul pour q). .

Exemple : $\frac{75}{90} \in \mathbb{Q}$ et $-\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$ (sont des rationnels)

Tous les nombres décimaux sont des nombres rationnels :
Exemple 1,59. C'est en fait le quotient des entiers 159 et 100 car 159 / 100 = 1,59.
De même, tous les entiers sont des décimaux.
Prenons l'exemple de -4. On peut dire que -4 est le quotient de -4 et de 1 car -4 / 1 = -4.

On résume cela par :$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$

Remarque1 : un rationnel non décimal a une écriture décimale périodique infinie :
$\frac{17}{7} =$ 2.4285714285714285714285714285714… ; 428571 se répète

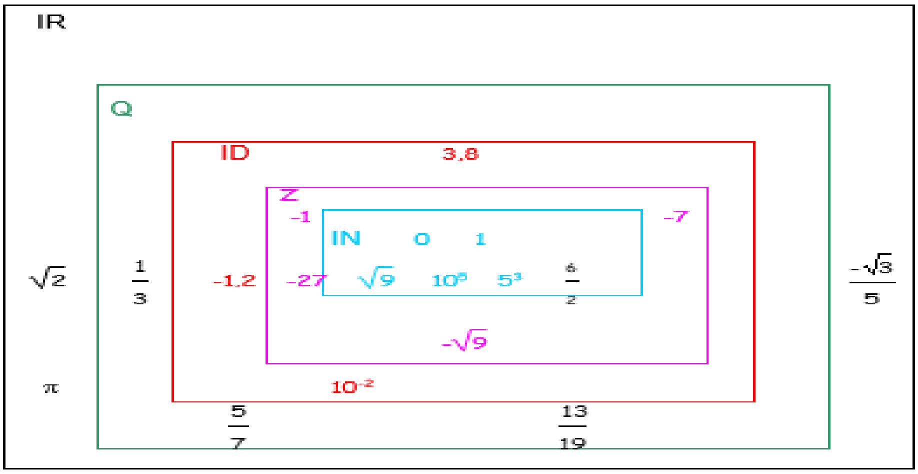
Remarque2: $\sqrt{2} \notin$ Q ; $-\frac{\sqrt{3}}{2} \notin$ Q ; $\pi \notin$ Q

5°) L'ensemble des réels. $\mathbb{R}$

Tous les nombres utilisés sont des réels. Cet ensemble est noté. $\mathbb{R}$

Remarque2: Parmi les nombres réels, il y a les entiers naturels, les entiers relatifs, les nombres décimaux, les nombres rationnels. Et on a : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset D \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

6°) <u>Représentation par ensembles</u>



Remarque3 : « soit x un nombre quelconque » sera désormais remplacé par : « soit x $\in$ IR » ou « soit x un nombre réel »

- Le signe * placé en haut à droite de la lettre désignant un ensemble de nombres, prive celui-ci de zéro.   Ainsi IR* désigne les réels non nuls.
- Le signe + ou - placé en haut à droite de la lettre désignant un ensemble de nombre, prive celui-ci des nombres négatifs positifs
Ainsi IR^+ désigne l'ensemble des réels positifs (avec zéro)
        IR^- désigne l 'ensemble des réels négatifs (avec zéro)

Exercice : Compléter le tableau suivant avec le signe $\notin$ ou $\in$.

x	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
-13				
59,0000002				
$-\frac{7}{4}$				
$\sqrt{4}$				
$\frac{23}{7}$				
$4-\pi$				
$-\sqrt{9}$				

Correction :

x	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
-13	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$
59,0000002	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$
$-\frac{7}{4}$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$
$\sqrt{4}$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$
$\frac{23}{7}$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$
$4-\pi$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$
$-\sqrt{9}$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$

Exercice : Dans chacun des cas, indiquer le plus petit ensemble de nombres auquel le nombre appartient. $1)\frac{125}{5}$ $2)\frac{7}{5}$ $3)\frac{21}{12}$ $4)\frac{-35}{7}$ $5)\frac{14}{21}$

Correction : $1)\frac{125}{5}=25\in\mathbb{N}$ $2)\frac{7}{5}=1,4\in D$ $3)\frac{21}{12}=\frac{7}{4}=1,75\in D$ $4)\frac{-35}{7}=-5\in\mathbb{Z}$ $5)\frac{14}{21}=\frac{2}{3}\in\mathbb{Q}$

Exercice : Compléter par : $\in$; $\notin$; $\subset$; $\not\subset$

$6...\mathbb{Z}$; $\frac{2}{3}...\mathbb{Q}$; $\sqrt{2}...\mathbb{Q}$; $\sqrt{2}...\mathbb{R}$; $\mathbb{Q}...\mathbb{R}$; $\mathbb{N}...\mathbb{Q}$; $-\frac{2}{3}...\mathbb{R}^+$; $\frac{2}{3}...\mathbb{N}$; $\frac{6}{2}...\mathbb{N}$; $\frac{\sqrt{100}}{5}...\mathbb{N}$; $\mathbb{Q}...\mathbb{Z}$; $\mathbb{Z}...\mathbb{Q}$;

$\pi...\mathbb{Z}$; $0...\mathbb{Q}^*$; $-\frac{7}{3}...\mathbb{Q}^{+*}$; $\sqrt{16}...\mathbb{N}$; $0...\mathbb{R}^*$; $\{1;3;-8\}...\mathbb{N}$; $\mathbb{R}^+...\mathbb{R}$; $\frac{1}{2}...D$; $\frac{1}{3}...D$

Correction :

$6\in\mathbb{Z}$; $\frac{2}{3}\in\mathbb{Q}$; $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$; $\sqrt{2}\in\mathbb{R}$; $\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$; $\mathbb{N}\subset\mathbb{Q}$; $-\frac{2}{3}\notin\mathbb{R}^+$; $\frac{2}{3}\notin\mathbb{N}$; $\frac{6}{2}\in\mathbb{N}$; $\frac{\sqrt{100}}{5}\in\mathbb{N}$; $\mathbb{Q}\not\subset\mathbb{Z}$;

$\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}$; $\pi\notin\mathbb{Z}$; $0\notin\mathbb{Q}^*$; $-\frac{7}{3}\notin\mathbb{Q}^{+*}$; $\sqrt{16}\in\mathbb{N}$; $0\notin\mathbb{R}^*$; $\{1;3;-8\}\not\subset\mathbb{N}$; $\mathbb{R}^+\subset\mathbb{R}$; $\frac{1}{2}\in D$; $\frac{1}{3}\notin D$

Exercice : *Vrai ou Faux ? Justifier la réponse.*

1. Un nombre décimal ne peut pas être un entier.
2. Un nombre décimal est un rationnel.
3. Un nombre décimal est un réel.
4. Un nombre reel est un entier.
5. Un nombre entier relatif est un décimal.
6. L'opposé d'un entier naturel est un entier naturel.
7. Toujour L'inverse d'un entier autre que 0 est un décimal.
8. $a-b$ et $b-a$ sont deux nombres inverses.
9. l'inverse d'un rationnel non nul est un rationnel.

Correction : 1. FAUX : il peut l'être. 1 est un décimal $\left(1=\frac{1}{10^0}\right)$ et il est entier.

2. VRAI : Un décimal $d=\frac{a}{10^n}$ est un rationnel$\left(\frac{a}{b}\right)$.

3. VRAI : Tout nombre est réel (jusqu'en Terminale S…).

4. FAUX : $\left(\sqrt{2}\right)\notin\mathbb{N}$.

5. VRAI : Bien sûr $\left(n=\frac{n}{10^0}\right)$.

6. FAUX : Si un entier *n* est positif, son opposé −*n* est négatif.

7. FAUX : 3 est un entier mais son inverse $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal.

8. FAUX : $a-b$ et $b-a$ sont deux nombres opposés.

9. VRAI : l'inverse d'un rationnel $\frac{p}{q}$ non nul est un rationnel $\frac{q}{p}$.

Exercice : Soient $A=\left\{-\frac{28}{5},-3,-\sqrt{2},\sqrt{3},2,\frac{5}{2},49\right\}$, $B=\left\{-3,3,\frac{147}{3}\right\}$, $C=\left\{\sqrt{3},\frac{5}{2},49\right\}$ trois ensembles.

1. Déterminez $A\cap B$; $A\cap C$; $A\cup B$; $A\cup C$; $A\cap\mathbb{N}$; $A\cap\mathbb{Z}$; $A\cap\mathbb{Q}$; $A\cap\mathbb{R}$.

2. Complétez … avec $\subset$ ou $\not\subset$.

$A\ldots\mathbb{Q}$ $\quad A\ldots\mathbb{R}$ $\quad B\ldots\mathbb{N}$ $\quad \{3,4\}\ldots A$ $\quad B\ldots\mathbb{Z}$ $\quad B\ldots A$ $\quad C\ldots A$ $\quad \left\{-\sqrt{2},\sqrt{3}\right\}\ldots A$

3. Complétez … avec $\in$ ou $\notin$.

$-3\ldots B$ $\quad 2,5\ldots A$ $\quad -\sqrt{2}\ldots C$ $\quad \frac{5}{3}\ldots B$ $\quad -5,6\ldots A$ $\quad \frac{147}{3}\ldots C$

Correction : 1) $A\cap B=\{-3\}$ $\quad A\cap C=\left\{\sqrt{3},2,\frac{5}{2},49\right\}$ $\quad A\cup B=\left\{-\frac{28}{5},-3,-\sqrt{2},\sqrt{3},2,3,\frac{5}{2},49\right\}$

$A\cup C=\left\{-\frac{28}{5},-3,-\sqrt{2},\sqrt{3},2,3,\frac{5}{2},49\right\}$; $\quad A\cap\mathbb{N}=\{2,49\}$ $\quad A\cap\mathbb{Z}=\{-3,2,49\}$ $\quad A\cap\mathbb{Q}=\left\{-\frac{28}{5},-3,,2,\frac{5}{2},49\right\}$

$A\cap\mathbb{R}=\left\{-\frac{28}{5},-3,-\sqrt{2},\sqrt{3},2,\frac{5}{2},49\right\}$

2) $A\not\subset\mathbb{Q}$ $\quad A\subset\mathbb{R}$ $\quad B\not\subset\mathbb{N}$ $\quad \{3,4\}\not\subset A$ $\quad B\subset\mathbb{Z}$ $\quad B\not\subset A$ $\quad C\subset A$ $\quad \left\{-\sqrt{2},\sqrt{3}\right\}\subset A$

3) $-3\in B$ $\quad 2,5\in A$ $\quad -\sqrt{2}\notin C$ $\quad \frac{5}{3}\ldots B$ $\quad -5,6\in A$ $\quad \frac{147}{3}\in C$