Racine carrée et opérations dans IR

Leçon1 : Calcul numérique partie3

Présentation globale

III) Racine carrée et opérations dans IR

Capacités attendues

- Distinguer un nombre et sa valeur approchée.
- Représenter un nombre sur la droite numérique.
- Maitriser les techniques de calcul numérique.

Recommandations pédagogiques

- On appliquera les différentes connaissances acquises sur les ensembles de nombre,
- On introduira des symboles ensemblistes et on renforcera ces connaissances et des Compétences acquises dans le cycle collégial ;
- On introduira, à partir, d'activités et d'exercices, la racine carrée d'un entier naturel qui n'est pas un carré parfait comme exemple de nombre irrationnel ;
- On choisira des situations qui mettent en évidence le rôle des mathématiques dans le Traitement des situations issues de la vie courante
- On introduira aux élèves des connaissances essentielles relatives à la calculatrice scientifique (Calcul d'une racine carrée, somme algébriques, valeurs approchées……) ;

III) Racine carrée

Activité : On considère un triangle ABC rectangle en A
1) Sachant que AB = 3 cm et AC = 4 cm,
Calculer la valeur exacte de BC.
Quels sont les nombres qui ont pour carré 25 ? Pourquoi a-t-on BC = 5 ?
Compléter la phrase suivante :
« BC est le nombre positif dont le carré est … »
2)On suppose maintenant que AB = 2 cm et AC = 3 cm.
« BC est le nombre positif dont le carré est ... »
Rechercher la valeur exacte de BC
On dira que la valeur exacte de BC est la racine carrée de 13 que l'on notera $\sqrt{13}$
Rechercher une valeur approchée de $\sqrt{13}$ (utiliser une calculatrice)
3) Peut-on obtenir la racine carrée de -16 ? (utiliser une calculatrice)
La calculatrice donne : ' MATH error '
La racine carrée d'un nombre négatif existe-t-elle ?

Définition : a est un nombre positif. La racine carrée de a, notée $\sqrt{a}$, est le nombre positif dont le carré est Égal à a.

Exemple : (utiliser une calculatrice)

$\sqrt{4} = 2$; $\sqrt{0} = 0$; $\sqrt{1}=1$; $\sqrt{225}=15$; $\sqrt{225}=15$; $\sqrt{1,5625}=1,25$; $\sqrt{36000000}=6000$;

Un nombre négatif n'a pas de racine carrée.

Propriétés : soient a et b deux nombres positifs ou nuls

1) $\left(\sqrt{a}\right)^2=\sqrt{a^2}=a$ 2) $\left(\sqrt{a}\right)^n=\sqrt{a^n};n\in\mathbb{N}^*$ 3) $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ 4) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}};b\succ 0$

Remarque : $\sqrt{a+b}\neq\sqrt{a}+\sqrt{b}$

En effet : $\sqrt{9+16}\neq\sqrt{9}+\sqrt{16}$ car : $\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$

Et $\sqrt{9}+\sqrt{16}=3+4=7$

Propriété : $x\geq 0$ et $y\geq 0$ $\sqrt{x}=\sqrt{y}$ ssi $x=y$

Propriété : $a \in \mathbb{R}^+$ $x^2 = a$ si et seulement si $x = \sqrt{a}$ ou $x = -\sqrt{a}$

Exemple : résoudre l'équation suivante $x^2 = 100$

$x^2 = 100$ si et seulement si $x = \sqrt{100}$ ou $x = -\sqrt{100}$ ssi $x = 10$ ou $x = -10$

Donc : $S = \{-10;10\}$

Quelques valeurs exactes à connaître :

a	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
√a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Exercice : calculer et simplifier :

$A = \sqrt{\frac{9}{2}}$; $B = \frac{\sqrt{28}}{\sqrt{14}}$; $C = 3\sqrt{20} + 4\sqrt{45} - 2\sqrt{80} - \sqrt{180}$; $D = 5\sqrt{12} + 8\sqrt{27} + \sqrt{75} - 2\sqrt{48} - \sqrt{147}$

Correction : $A = \sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ $B = \frac{\sqrt{28}}{\sqrt{14}} = \sqrt{\frac{28}{14}} = \sqrt{2}$

$C = 3\sqrt{20} + 4\sqrt{45} - 2\sqrt{80} - \sqrt{180} = 3\sqrt{4\times5} + 4\sqrt{9\times5} - 2\sqrt{16\times5} - \sqrt{36\times5}$

$C = 3\times2\sqrt{5} + 4\times3\sqrt{5} - 2\times4\sqrt{5} - 6\sqrt{5} = 6\sqrt{5} + 12\sqrt{5} - 8\sqrt{5} - 6\sqrt{5} = (6+12-8-6)\sqrt{5}$

$C = 4\sqrt{5}$

$D = 5\sqrt{12} + 8\sqrt{27} + \sqrt{75} - 2\sqrt{48} - \sqrt{147}$

$D = 5\sqrt{4\times3} + 8\sqrt{9\times3} + \sqrt{25\times3} - 2\sqrt{16\times3} - \sqrt{49\times3}$

$D = 10\sqrt{3} + 24\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - 8\sqrt{3} - 7\sqrt{3} = 24\sqrt{3}$

Exercice : *1)* Mettre le nombre suivant sous forme $a\sqrt{7}$ où *a* est un entier relatif :

$3\sqrt{112} - 2\sqrt{7} + 5\sqrt{28}$.

2) Donner la valeur exacte du nombre suivant : $A = \left(4 - \sqrt{5}\right)\left(2 + 3\sqrt{5}\right)$.

3) Donner à l'aide de la calculatrice une valeur approchée de A

4) Simplifier : $B = \frac{8\sqrt{2} + 40}{8}$.

Correction :1) $3\sqrt{112} - 2\sqrt{7} + 5\sqrt{28} = (3\times4 - 2 + 5\times2)\sqrt{7} = 20\sqrt{7}$.

2) $A = \left(4 - \sqrt{5}\right)\left(2 + 3\sqrt{5}\right) = 8 + 12\sqrt{5} - 2\sqrt{5} - 15 = 10\sqrt{5} - 7$ (la valeur exacte)

3) $A = \left(4 - \sqrt{5}\right)\left(2 + 3\sqrt{5}\right) = 10\sqrt{5} - 7 \approx 10\times2{,}23 - 7 \approx 15{,}3$ *(la valeur approchée)*

4) $B = \frac{8\sqrt{2} + 40}{8} = \frac{8\sqrt{2} + 8\times5}{8} = \frac{8\left(\sqrt{2} + 5\right)}{8} = \sqrt{2} + 5$.

Exercice : Ecrire $A = \sqrt{98} + \sqrt{2}$ sous la forme $a\sqrt{b}$ où *b* est le plus petit possible. Ce nombre est–il un élément de $\mathbb{Q}$?

Correction : $A = \sqrt{98} + \sqrt{2} = \sqrt{49\times2} + \sqrt{2} = \sqrt{49}\times\sqrt{2} + \sqrt{2} = 7\times\sqrt{2} + \sqrt{2} = (7+1)\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$

Donc : $A = 8\sqrt{2}$ qui n'est pas un rationnel.

Exercice : simplifier ou développer 1) $\sqrt{2}\times\sqrt{6}$ 2) $\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{3}}$ 3) $\sqrt{12} - \sqrt{108}$ 4) $\left(2 - \sqrt{6}\right)^2$

5) $\left(x - \sqrt{2}\right)\left(x + \sqrt{2}\right)$ 6) $3\sqrt{2} + 5\sqrt{3} + 7\sqrt{2} - 6\sqrt{3}$ 7) $7\sqrt{5} - \sqrt{20} - \sqrt{45}$ 8) $\frac{1}{\sqrt{2} - 1}$

Correction :1) $\sqrt{2}\times\sqrt{6} = \sqrt{2}\times\sqrt{2\times3} = \sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{3} = \sqrt{2}^2\times\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

2) $\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{21}{3}} = \sqrt{7}$ 3) $\sqrt{12} - \sqrt{108} = \sqrt{4\times3} - \sqrt{12\times9} = 2\sqrt{3} - 6\sqrt{3} = -4\sqrt{3}$

4) $\left(2-\sqrt{6}\right)^2 = 2^2 - 2\times2\times\sqrt{6} + \sqrt{6}^2 = 4 - 4\sqrt{6} + 6 = 10 - 4\sqrt{6}$ 5) $\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right) = x^2 - \sqrt{2}^2 = x^2 - 2$

6) $3\sqrt{2} + 5\sqrt{3} + 7\sqrt{2} - 6\sqrt{3} = 10\sqrt{2} - \sqrt{3}$; 7) $7\sqrt{5} - \sqrt{20} - \sqrt{45}$ $= 7\sqrt{5} - 2\sqrt{5} - 3\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$

8) *Rendre le dénominateur rationnel* $A = \frac{1}{\sqrt{2}-1}$ *on multiplie le dénominateur par son conjugué*

$A = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}+1}{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)} = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}^2 - 1^2} = \frac{\sqrt{2}+1}{1} = \sqrt{2}+1$